

La "red" de Galton como un sistema inductor de ruido

A. MEDINA*, E.E. LUNA Y R. ALVARADO

Laboratorio de Fluidos y Medios Granulados

Escuela de Física de la Universidad Autónoma de Zacatecas

Antonio Dovalí Jaime S/N, Apartado postal C-580, 98000 Zacatecas, Zac., México

Recibido el 20 de mayo de 1993; aceptado el 12 de septiembre de 1994

RESUMEN. La "red" de Galton consiste en una red periódica vertical en cuyos nodos se fijan clavos y a través de la cual viajan granos esféricos debido a la acción de la gravedad; cada grano al interaccionar con la red describe trayectorias azarosas o ruidosas cuya dinámica puede ser estudiada experimentalmente. A diferencia de los sistemas mesoscópicos, donde no se ha caracterizado experimentalmente el ruido contenido en la trayectoria de una sola partícula, en la red de Galton esto puede hacerse con facilidad incluso para varios tamaños de grano.

ABSTRACT. The Galton lattice is a periodic configuration with fixed nails at its nodes; spherical grains travel through them due to the action of gravity. Each grain interacts with the lattice and describes a random or noisy path that can be experimentally studied. Unlike mesoscopic systems, where the noise of a one particle path has not been characterized, this can be achieved for several grain sizes.

PACS: 01.50.Pa; 05.40.+j

1. INTRODUCCIÓN

A menudo ocurren en la naturaleza fenómenos que requieren para su descripción de leyes probabilísticas, tal es el caso, por ejemplo, de los sistemas cuánticos donde sólo es posible conocer el valor medio de un operador asociado a una cantidad observable. De igual modo, en la física clásica abundan ejemplos de sistemas en los que la descripción matemática es sólo posible vía tratamientos probabilísticos. En la mayoría de los sistemas clásicos la necesidad de un tratamiento de tal naturaleza aparece debido a la gran cantidad de partículas que interaccionan y que dan lugar a comportamientos promedios de cantidades microscópicas como, por ejemplo, la presión sobre las paredes de un contenedor debida a un gas o a un líquido.

Una aproximación distinta a la anterior se da cuando nos preocupamos por describir la trayectoria o la traza de una partícula, como función del tiempo, en un medio denso. La partícula al interaccionar con el medio (o con algún tipo de red en un modo discreto) tiene la probabilidad de moverse en una cierta dirección y con una cierta rapidez. Esto lleva a un comportamiento azaroso para la trayectoria, el cual puede verse como un ejemplo de proceso estocástico.

*IFUNAM, Apartado postal 20-364, 01000 México, D.F., México.

Los procesos azarosos o estocásticos (que tienen que ver con la variación de diversas cantidades) no se limitan al campo de la física, sino ocurren también en biología, comunicaciones y aun en la sociología [1-3]. Un ejemplo novedoso de un sistema biológico en el que ocurre movimiento estocástico son las células mamarias; éstas responden con complicados movimientos (movimientos browniano fraccional) ante impulsos eléctricos controlados. En el área de comunicaciones el ruido dicotómico o ruido telegráfico es un claro ejemplo de la introducción de ruido en la información transmitida; aunque la información se da en términos de ceros y de unos, el tiempo entre una y otra señal no es exactamente el mismo debido a la manipulación humana. Finalmente, la emigración y la inmigración entre dos países son aspectos sociológicos gobernados por leyes probabilísticas influenciadas por factores subjetivos y objetivos.

En este trabajo estamos interesados en resaltar el papel que juega la descripción del movimiento azaroso de una partícula en una red de clavos, en términos de ecuaciones diferenciales. En general, esto es posible si resolvemos la ecuación diferencial para la función de distribución de probabilidad de las variables del problema mecánico o a través de las soluciones de las ecuaciones diferenciales para las variables estocásticas mismas (en nuestro caso la posición y la velocidad). En la siguiente sección elegimos esta última opción y resumimos las principales aproximaciones con el interés de mostrar posteriormente, con experimentos, la conveniencia de ésta para la descripción de la dinámica de la partícula de la red.

2. MARCO TEÓRICO

La red de Galton [4] que, por construcción, es periódica (véase Fig. 1), genera una trayectoria estocástica (abrupta) debido al continuo choque del grano con la red de clavos; sin embargo, al igual que en otros procesos estocásticos como, por ejemplo, el movimiento browniano [2] no nos interesa conocer la dinámica exacta de las colisiones involucradas.

Para modelar la dinámica de partículas dentro de la red de Galton como un ejemplo de proceso estocástico o ruidoso es conveniente resumir las principales hipótesis de la descripción matemática para este tipo de sistemas.

A nivel macroscópico es posible considerar que una cantidad física dada obedece una ley fenomenológica lineal del tipo [3]

$$\frac{dQ}{dt} = -\gamma Q, \quad (2.1)$$

donde γ es una constante y Q , por ejemplo, puede ser una componente de la velocidad de una partícula pesada suspendida en un gas o un líquido. A un nivel más detallado o preciso de descripción vemos que la traza de dicha partícula sufre cambios abruptos inducidos por las moléculas del medio (gas o líquido). En este caso se puede plantear una ecuación "detallada" para la cantidad física q cuyo valor medio para adecuados intervalos de tiempo es Q . Esta ecuación se llama la ecuación de Langevin [1-3, 5-6]:

$$\frac{dq}{dt} = -\gamma q + f(t). \quad (2.2)$$

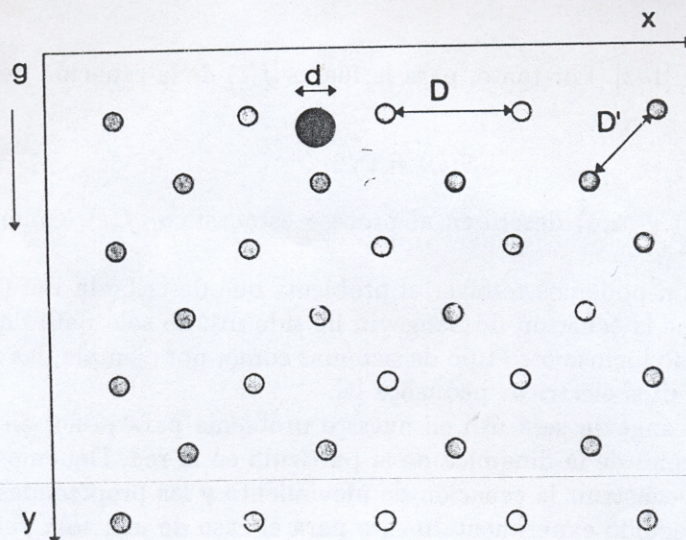


FIGURA 1. Vista frontal de la "red" de Galton con un arreglo de clavos. En general el plano de la "red" forma un ángulo θ respecto a la vertical.

Dicha ecuación tiene sentido sólo si se da alguna información sobre la fuerza "azarosa" $f(t)$. Ya que $f(t)$ se puede entender como una función rápida e irregular del tiempo, ésta debe ser descrita por sus propiedades estocásticas. Específicamente, se supone que

$$\langle f(t) \rangle = 0, \tag{2.3}$$

donde $\langle \quad \rangle$ denota el promedio temporal en un intervalo grande comparado con las rápidas variaciones de $f(t)$, pero corto comparado con el tiempo fenomenológico de amortiguamiento γ^{-1} . El segundo momento de $f(t)$ puede ser supuesto como

$$\langle f(t)f(t') \rangle = \Gamma \delta(t - t'), \tag{2.4}$$

donde Γ es una constante independiente de t ($t > t'$) y de q . La función delta de Dirac, $\delta(t - t')$, pone de manifiesto que la escala temporal para la correlación de las fuerzas estocásticas es despreciablemente corta. Las hipótesis (2.3) y (2.4) sobre $f(t)$ son a menudo consideradas como las condiciones de gaussianidad (*i.e.*, sólo son necesarios los dos primeros momentos de la distribución asociada con los promedios temporales).

La presencia de la función delta en (2.4) también manifiesta que la fuerza estocástica, f , es un proceso markoviano o que contiene "ruido blanco", ya que su densidad espectral o espectro de potencia es una constante para cualquier valor de la frecuencia temporal ω . Desde un punto de vista físico el espectro de potencia $S(\omega)$ da información sobre los tiempos de correlación: cuando $S(\omega)$ cambia mucho a baja frecuencia, la cantidad $f(t)$ varía muy lentamente; lo contrario también es cierto: una lenta variación de $S(\omega)$ implica que $f(t)$ varía muy rápido. Es debido a esto que la luz blanca tiene un espectro de potencia independiente de ω .

Desde un punto de vista formal el espectro de potencia $S(\omega)$ de la fuerza $f(t)$ se define como la transformada inversa de Fourier de la correlación $\langle f(t)f(t') \rangle - \langle f(t) \rangle^2$ (teorema

de Wiener-Khintchine [1-3]. Por tanto, para la fuerza $f(t)$ de la ecuación de Langevin se encuentra que

$$S(\omega) = \Gamma/2, \quad (2.5)$$

es decir, las Ecs. (2.3) y (2.4) describen al proceso estocástico, $f(t)$, como gaussiano y markoviano.

Con esta información podemos resolver el problema que describe la Ec. (2.2). Es conveniente mencionar que la ecuación de Langevin ha sido útil no sólo para describir movimientos browniano, sino incluso otro tipo de sistemas como, por ejemplo, las fluctuaciones en la corriente en circuitos eléctricos pequeños [5].

La descripción de Langevin será útil en nuestro problema para poner en contexto los resultados experimentales de la dinámica de la partícula en la red. Debemos hacer notar que el programa para construir la ecuación de movimiento y las propiedades de la fuerza estocástica no se ha seguido experimentalmente para el caso de una sola partícula en un medio denso. En este trabajo no pretendemos sustituir al medio por una red discreta, sino, más bien, caracterizar el efecto de la red sobre la trayectoria del grano.

3. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

Nuestro dispositivo experimental, la "red" de Galton [4] (véase Fig. 1) es un arreglo triangular de clavos, perpendiculares a la superficie, que en nuestro caso tienen diámetro $\delta = 1.96 \pm 0.05$ mm; están separados una distancia $D = 10 \pm 0.05$ mm en la dirección horizontal y una distancia $D' = 11.5 \pm 0.05$ mm en la dirección oblicua (63.43° respecto a la horizontal). La red en nuestros experimentos fue construida sobre una tabla de triplay de 58 cm de largo por 45 cm de altura. El movimiento de los granos esféricos de vidrio cuando la red está incluida es bidimensional y es inducido por la gravedad; cuando el plano de la red está sobre la horizontal, el movimiento de los granos en la red puede ser iniciado por una fuerza instantánea que después deja de actuar. Esta última situación no es de interés en este trabajo.

La caída desde el reposo de los granos de diámetros $d = 3, 4, 5$ y 6 mm fue filmada con una cámara de video a 1/100 seg de velocidad de obturación y una resolución de treinta cuadros cada segundo.

Los experimentos que reportamos fueron realizados a una inclinación $\theta = 30^\circ$ respecto a la horizontal; para cada ángulo y diámetro de grano se filmaron alrededor de 20 eventos (recorridos del grano en la red). Una trayectoria típica en la red de Galton (obtenida con una resolución temporal de 1/30 de segundo y una resolución espacial de 0.5 mm) se reproduce en la Fig. 2. Los resultados que se describen en la siguiente sección se obtiene con cualquiera de los granos de distinto diámetro e igual separación entre los clavos en la red.

4. RESULTADOS

Al igual que en el estudio teórico del movimiento de una partícula en un líquido o un gas, en nuestro caso no podemos dar, en términos de ecuaciones deterministas, la dinámica

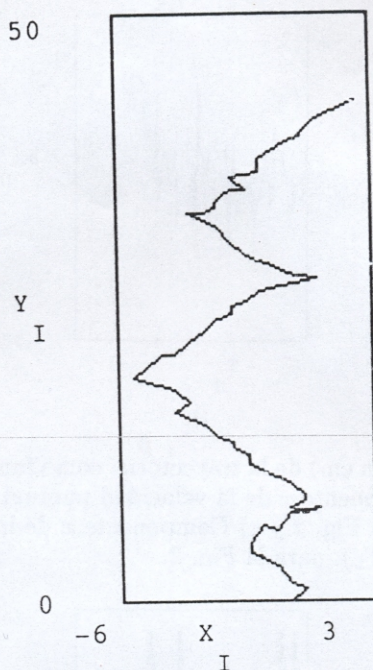


FIGURA 2. Trayectoria típica de un grano esférico en la red de Galton. Las dimensiones son dadas en centímetros. La figura está rotada 180° respecto a la trayectoria real.

precisa del movimiento del grano. Es entonces más adecuado presentar la descripción del movimiento por su comportamiento promedio y , a un nivel más detallado, por medio de una ecuación tipo Langevin (Sec. 2).

La Fig. 2 muestra la trayectoria irregular de los granos que podemos descomponer en las direcciones x e y de dicha figura. A partir de esta descomposición obtenemos las Figs. 3 y 4 que indican los comportamientos para las componentes x y y , respectivamente, de la posición, la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo (la dependencia de estas cantidades en el tiempo se conocen también como series de tiempo). Nótese el comportamiento lineal promedio de la componente y de la trayectoria a diferencia del comportamiento azaroso más complicado de la componente x que fluctúa alrededor del valor medio cero. Para obtener las ecuaciones fenomenológicas a partir del formalismo de la Sec. 2 vemos que nuestros resultados experimentales son cualitativamente los mismos para todos los tamaños de grano, por lo cual el comportamiento promedio de $\langle y(t) \rangle$ y de $\langle x(t) \rangle$ [Figs. 3a) y 4a)] lleva estrictamente a que

$$Y(t) = \langle y(t) \rangle = \gamma t \quad \text{y} \quad X(t) = \langle x(t) \rangle = 0, \quad (4.1)$$

donde γ , la pendiente de la recta, es una constante para cada tamaño de grano. De aquí deducimos que la velocidad promedio para cada componente resulta ser

$$V_y = \frac{dY}{dt} = \gamma \quad \text{y} \quad V_x = \frac{dX}{dt} = 0, \quad (4.2)$$

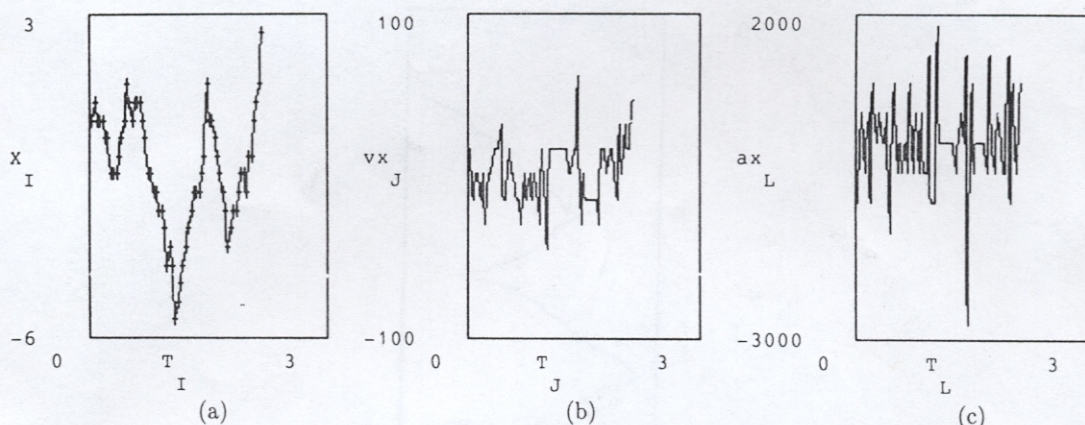


FIGURA 3. a) Componente x (x_I , en cm) de la trayectoria, como función del tiempo (T_I , en segs.), para la traza de la Fig. 2. b) Componente x de la velocidad puntual (v_{xJ} , en cm/s), como función del tiempo (T_J), para la traza de la Fig. 2 y c) Componente x de la aceleración puntual (a_{xL} , en cm/s²), como función del tiempo (T_L), para la Fig. 2.

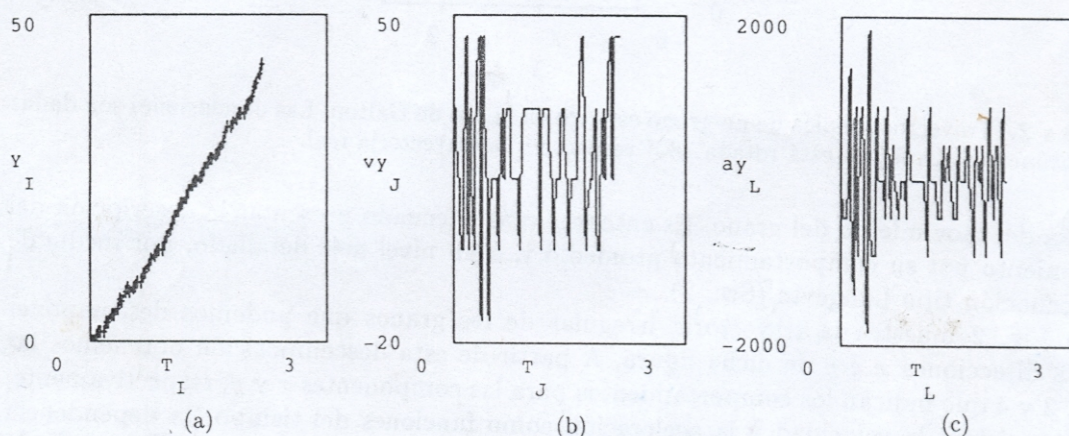


FIGURA 4. a) Componente y (y_I , en cm), como función del tiempo (T_I , en segs.), de la trayectoria de la Fig. 2. b) Componente y de la velocidad puntual (v_{yJ} , en cm/s), como función del tiempo (T_J), para la trayectoria de la Fig. 2 y c) Componente y de la aceleración puntual (a_{yL} , en cm/s²), como función del tiempo (T_L), de la Fig. 2.

y, finalmente, las componentes de aceleración media son

$$\frac{dV_y}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dV_x}{dt} = 0; \tag{4.3}$$

i.e., el movimiento promedio en x y y es no acelerado.

A pesar de que las Ecs. (4.3) son similares en forma, éstas tienen distinto origen detallado, lo cual discutimos a continuación.

La aleatoriedad en la trayectoria es originada por el continuo choque de los granos con los clavos, al caer los primeros bajo la acción de la gravedad. Podemos prescindir

del detalle de cada colisión si analizamos la traza del grano en la red y entendemos la desviación abrupta como debida a fuerzas estocásticas. Las Figs. 3c y 4c muestran la complicada variación de la aceleración, a partir de lo cual podemos suponer que en la dirección x actúa una fuerza $h(t)$ con media nula y que en la dirección y , sobre la canica, actúan dos fuerzas; una que es debida a la gravedad y que la acelera hacia abajo, y otra, estocástica, tipo esferas duras, que es proporcional a la velocidad instantánea con media no nula y que apunta en la dirección opuesta a la gravedad. En este caso las ecuaciones de movimiento de la dinámica detallada para cada componente pueden escribirse como

$$\frac{dv_x}{dt} = h(t), \quad (4.4a)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = f(t) + \alpha V_0 = -\alpha(v_y - V_0), \quad (4.4b)$$

donde v_x y v_y son las componentes x y y , respectivamente, de la velocidad instantánea (hasta $1/30$ de s), V_0 es la velocidad media en la dirección y de la canica y es una función del ángulo θ , α es un coeficiente de proporcionalidad que discutimos más abajo, y $f(t)$ y $h(t)$ son las fuerzas estocásticas opuestas al movimiento de las direcciones y y x , respectivamente. En las Ecs. (4.4) definimos las fuerzas estocásticas por unidad de masa de manera que $f(t)$ y $h(t)$ satisfagan las propiedades

$$\langle h(t) \rangle = 0, \quad (4.5a)$$

$$\langle f(t) \rangle = -\alpha V_0; \quad (4.5b)$$

éstas se obtienen de que el promedio temporal de las Ecs. (4.4) es cero, ya que el movimiento promedio es no acelerado y valen para los diámetros de grano aquí tratados. V_0 es la velocidad en que las dos fuerzas se eliminan y, de acuerdo con (4.4b), si $v_y > V_0$, el término de colisiones domina; mientras que si $v_y < V_0$, domina la gravedad; esto nos permite calcular el valor de α , que para $\theta = 30^\circ = \pi/6$ rad es $\alpha = 23.17 \text{ s}^{-1}$ para canicas de 3 mm, $\alpha = 30.29 \text{ s}^{-1}$ para canicas de 4 mm, $\alpha = 39.47 \text{ s}^{-1}$ para canicas de 5 mm y $\alpha = 52.17 \text{ s}^{-1}$ para canicas de 6 mm. Estos valores de α implican que los tiempos fenomenológicos de amortiguamiento $1/\alpha$ decrecen cuando el diámetro aumenta.

La forma en la que la velocidad media V_0 depende de θ se determina al observar que V_0 es aproximadamente simétrica respecto a $\theta = 50^\circ = 5\pi/18$ rad. Un buen ajuste lo da:

$$V_0 = 0.81 \tan \left[\pi \left(\frac{9\theta}{4\pi} - \frac{5}{8} \right) \right] + A_n, \quad \text{con } 10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ rad} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ, \quad (4.6)$$

donde A_n es una constante para cada diámetro y el subíndice n indica el valor del diámetro; para $n = 6$, $A_6 = 9.55 \text{ cm/s}$; $n = 5$, $A_5 = 13.44 \text{ cm/s}$; $n = 4$, $A_4 = 17.53 \text{ cm/s}$; y para $n = 3$, $A_3 = 21.62 \text{ cm/s}$. En la Fig. 5 ilustramos el comportamiento de $V_0(\theta)$ para $n = 6$. Es conveniente mencionar que los límites para θ son, desde luego, impuestos por

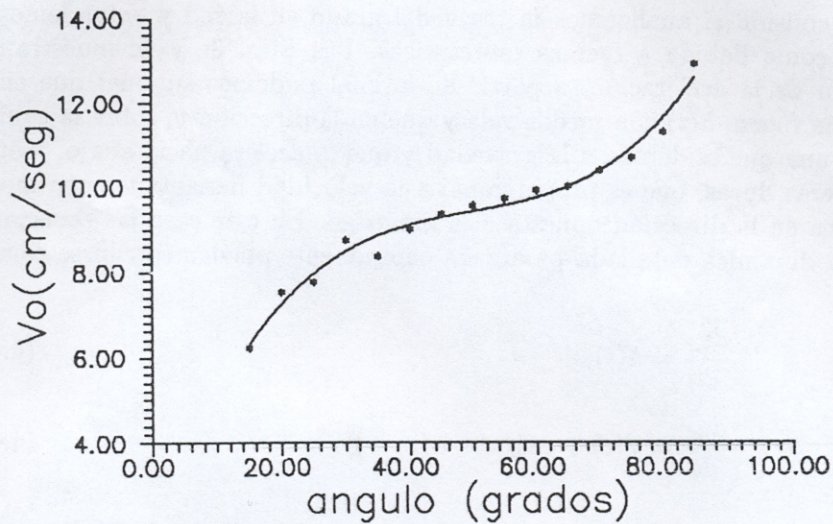


FIGURA 5. Valor medio de la componente y de la velocidad (V_0) como función del ángulo de inclinación (θ) para canicas de 6 mm.

las condiciones del experimento; para $\theta < 10^\circ$ no hay movimiento de los granos (inducido por la gravedad), y para $\theta \geq 90^\circ$ las canicas salen de la red.

Estrictamente, las relaciones (4.4), (4.5) y (4.6) se cumplen en intervalos de tiempo del orden de α^{-1} , es decir, en estos intervalos la fuerza promedio $\langle f(t) \rangle$ alcanza el valor $-\alpha V_0$, con lo cual el movimiento acelerado desaparece. Lo anterior significa que los intervalos adecuados para realizar los promedios dependen del diámetro y son menores conforme aumenta éste.

Las expresiones (4.5) confirman los resultados no obvios *a priori*, pero ya conocidos a partir de la Ec. (4.3): a) que en la dirección transversal (x) la fuerza promedio es cero, por lo que la desviación promedio también es cero; y b) que en la dirección longitudinal (y) la fuerza promedio también es cero, pero los granos se mueven como partículas libres. Esto último puede comprobarse de otro modo, calculando el desplazamiento cuadrático medio, $\langle y^2(t) \rangle$. En nuestros experimentos los datos se ajustan a la familia de parábolas

$$\langle y^2(t) \rangle = \beta t^2, \quad (4.7)$$

con $\beta = \text{cte.}$ y t el tiempo. Expresiones de la forma (4.7) valen para los distintos diámetros de granos usados en nuestros experimentos (véase Fig. 6) e indican, debido a esto, un comportamiento de partícula libre para los mismos. Obsérvese también que a medida que el grano crece su movimiento en la red es más lento.

El ruido de la trayectoria puede caracterizarse, como mencionamos en la Sec. 2, por medio del espectro de potencia, que alternativamente es calculado con la relación [8,9]

$$S(\omega) = \frac{|f(\omega)|^2}{\omega}, \quad (4.8)$$

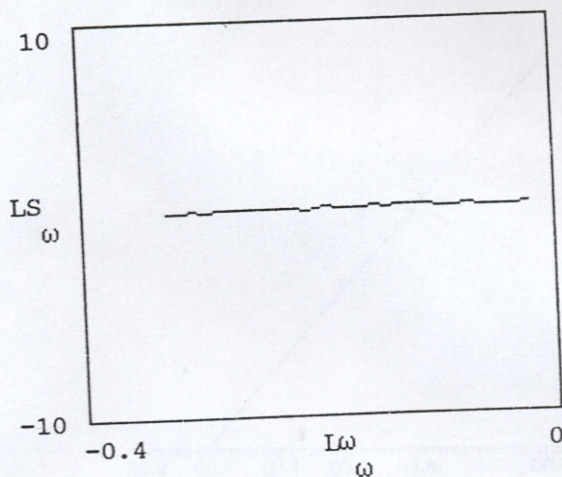


FIGURA 6. Desplazamiento cuadrático medio $\langle y^2(t) \rangle$ como función del tiempo para los distintos tamaños de grano.

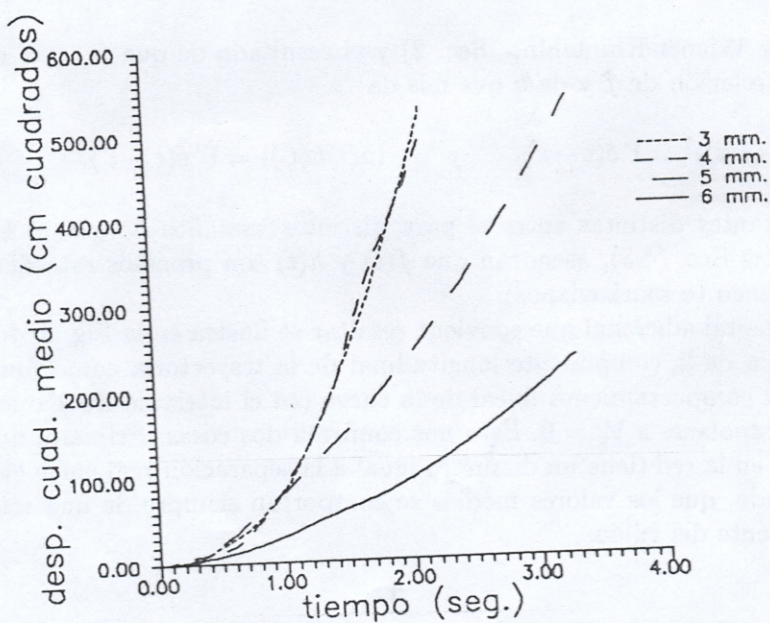


FIGURA 7. Gráfica logarítmica del espectro de potencia S_ω (en unidades arbitrarias) como función de la frecuencia ω_ω (en s^{-1}). Nótese el comportamiento aproximadamente constante de LS_ω , lo que asegura ruido blanco.

donde $f(\omega)$ es la transformada de Fourier de la serie de tiempo $f(t)$ y $| \quad |^2$ denota el cuadrado de la norma. El cálculo de $S(\omega)$ a partir de las series $f(t)$ y $h(t)$, para todos los diámetros de grano, da valores constantes (Fig. 7), lo cual asegura ruido blanco para $f(t)$ y $h(t)$.

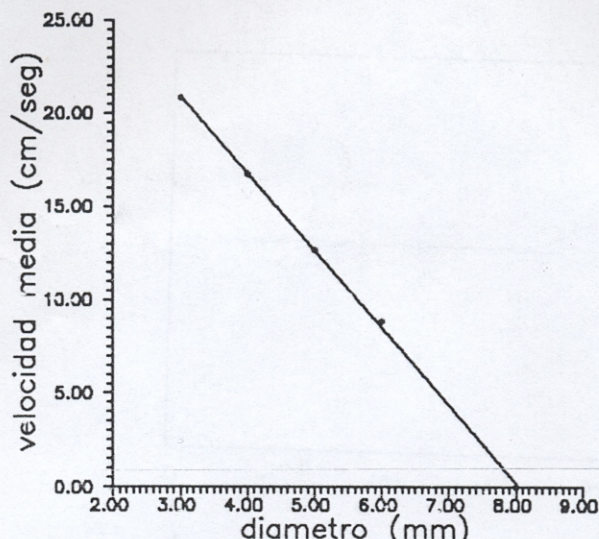


FIGURA 8. Velocidad media como función del diámetro de grano para la red de Galton a 30° respecto a la horizontal.

Usando el teorema de Wiener-Khintchine (Sec. 2) y el resultado de que $S(\omega) = \text{constante}$, calculamos la correlación de f y de h que nos da

$$\langle f(t)f(t') \rangle - \langle f(t) \rangle^2 = \Gamma \delta(t - t') \quad \text{y} \quad \langle h(t)h(t') \rangle = \Gamma' \delta(t - t'). \quad (4.9)$$

donde Γ y Γ' son constantes distintas entre sí para distintos tamaños de grano. Estas expresiones junto, con las Ecs. (4.5), aseguran que $f(t)$ y $h(t)$ son procesos estocásticos gaussianos con ruido blanco (o markovianos).

Un resultado experimental adicional que conviene resaltar se ilustra en la Fig. 8, donde graficamos el valor medio de la componente longitudinal de la trayectoria como función del tamaño de grano. El comportamiento lineal de la curva (en el intervalo de diámetros considerado) puede extrapolarse a $V_y = 0$. Esto nos confirma dos cosas: Primero, que el grano máximo que cabe en la red tiene un diámetro igual a la separación real entre clavos ($D - \delta \simeq 8 \text{ mm}$); segundo, que los valores medios se comportan siempre de una misma manera independientemente del ruido.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Dos aspectos originales del presente trabajo, que lo distinguen de estudios previos del movimiento estocástico de partículas pequeñas en fluidos [10,11], son, en primer lugar, que el movimiento de los granos en la red es originado por la gravedad (a diferencia de los fluidos, donde el movimiento es originado por agitación térmica) y, en segundo lugar, que las complicadas trayectorias de los granos son modeladas vía ecuaciones diferenciales estocásticas. Hasta donde sabemos ésta es la primera vez que la conexión entre ruido y movimiento puramente mecánico es evidenciada.

Una primera conclusión del presente estudio es que se han mostrado experimentalmente varios de los hechos más importantes, a menudo considerados como hipótesis [1-3, 5-6] del movimiento estocástico de partículas en medios densos. La red de Galton, a pesar de ser un sistema muy simple, discreto y regular en su construcción, induce ruido en la trayectoria que puede ser caracterizado como blanco y gaussiano. Debemos notar, sin embargo, que las ecuaciones fenomenológicas que gobiernan el movimiento del grano en la red (cuya forma es la misma para granos entre 3- 6 mm e igual constante de la red) son distintas para las componentes transversal y longitudinal, pues mientras unas describen movimiento promedio transversal nulo (segundas ecuaciones en (4.1)-(4.3)), las otras describen movimientos promedio longitudinal con velocidad constante (primeras ecuaciones en (4.1)-(4.3)).

A $\theta = 90^\circ$ los resultados para la componente transversal de la posición, de la velocidad y de la aceleración pueden considerarse correctos para redes tridimensionales. En efecto, si suponemos en lugar de un arreglo triangular un arreglo FCC (cúbico centrado en las caras) de dispersores fijos (del cual el arreglo triangular de este experimento es una proyección), la elección de la dirección x o z es indiferente y se obtienen las mismas ecuaciones.

Una posible extensión de este trabajo consiste en construir una red de Galton con zonas a lo largo de la dirección transversal al movimiento, con diferentes separaciones entre clavos. Los granos durante su recorrido pueden estar momentáneamente en redes con distinta separación. Esto daría origen a un comportamiento más complicado que el estudiado en este trabajo y podría servir como un modelo académico del flujo de agua a través de rocas, para el cual se exige la condición de velocidad longitudinal constante y para el que existen modelos (discretos) de computadora y estudios experimentales [7] con los cuales comparar.

Otro enfoque para el caso del estudio del ruido podría realizarse en el mismo sistema analizando el sonido producido por los granos al golpear a los clavos. Los diferentes tonos e intensidades son la respuesta a los diversos tipos de choques. El estudio de estas señales como función el tiempo permitiría estudiar otro ejemplo de ruido.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecemos al Dr. Augusto Espinoza Garrido, de la EFUAZ, y al Fís. César Zepeda, de la FCUNAM, la ayuda en diversas etapas de la realización de este trabajo. A.M. agradece al árbitro su cuidadosa revisión y crítica, sin lo cual esta versión no hubiera sido posible.

REFERENCIAS

1. P. Hänggi, y H. Thomas, *Phys. Reports* 88 (1982) 207.
2. R.F. Fox, *Phys. Reports* 48 (1978) 179.
3. N.G. van Kampen, *Phys. Reports* 24C (1976) 171.
4. F. Galton, *Proc. Roy Soc.* 29 (1879) 365.
5. R.E. Burgess (editor), *Fluctuation Phenomena in Solids*, Academic Press, New York (1965).

6. E.W. Montroll y J.L. Lebowitz (editores), *Studies in Statistical Mechanics*, Vol. XI. North-Holland, Amsterdam (1984).
7. F. Feder y A. Aharony (editores), *Fractals in Physics*, North-Holland, Amsterdam (1990).
8. R.W. Ramirez, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, New York (1985).
9. N.G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland, Amsterdam (1992).
10. H. Kruglak, *Physics Teachers* **26** (1988) 157.
11. A. Simon y A. Libchaber, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 3375.