

# Razón media de flujo granular en tolvas bidimensionales

ABRAHAM MEDINA,\* ERICK LUNA\* Y ROLANDO ALVARADO\*

## *Granular median flow rate in two dimensional blenders*

*Abstract. Experimentally, we studied the medium flow reason.  $W$ , in terms of the filling level,  $H$ , in square bi-level hoppers. Three different groups of granular non-cohesive material may be induced when the exit hole is located in different spots at the bottom of the hoppers. As a result, contrasting other authors' theory, we found a clear dependency upon the filling level. We also discussed the role played by the exit hole in the medium flow reason values.*

PACS: 46.10. +z 47.50. +d

## Introducción

Los medios granulados, cuyos ejemplos más notables son los polvos y las arenas, han recibido recientemente gran atención por parte de la comunidad de físicos (Mehta 1992; Jullien *et. al.*, 1992; Evesque *et. al.*, 1990 y Haff, 1983). Interesantes fenómenos tales como la segregación (Jullien *et. al.*, 1992), las avalanchas (Mehta, 1992 y Evesque, 1990), el arqueo (Mehta, 1992 y Reynolds, 1885) o la dilatación (Reynolds, 1885) distinguen el complejo comportamiento de estos materiales. De igual manera, sus aplicaciones tecnológicas e industriales, principalmente las relacionadas con el transporte y almacenamiento de granos (Mehta, 1992) y la mecánica de suelos (Sokolovskii, 1965) han motivado la investigación de la dinámica granular en áreas aparentemente tan distantes como la ingeniería química y la ingeniería civil. A pesar de todo lo anterior y de que Coulomb (1773) inició

hace más de doscientos años las investigaciones sistemáticas para entender dichos medios, no hay aún una teoría fenomenológica consistente, similar a las que describen a los líquidos o a los sólidos.

Las principales dificultades desde el punto de vista físico para la descripción de estos materiales aparecen debido al estado intermedio que el material granular suele presentar (Haff, 1983): en reposo, al igual que los sólidos, los medios granulados pueden soportar esfuerzos cortantes sin deformación hasta ciertos valores límite a partir de los cuales éstos se deforman permanentemente; en movimiento, el flujo granular parece obedecer relaciones constitutivas similares a las de los fluidos no newtonianos. Aunado a esto, la composición misma del material granular (granos rígidos de forma arbitraria que interaccionan por contacto) dificulta aún más la formulación de teorías válidas para las distintas condiciones de movimiento.

El flujo granular en tolvas constituye, debido a sus importantes aplicaciones, un problema de enorme interés y dificultad (Nederman *et. al.*, 1982 y Wieghardt, 1975). Alrededor de él se han formulado una gran cantidad de estudios teóricos y

\* Laboratorio de Fluidos y Medios Granulados. Escuela de Física de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Antonio Dovalí Jaime S.N. Apdo. Postal C-580. Zacatecas, Zac. México. Teléfono y Fax: 91(492) 4-13-14. Los autores agradecen a Marina I. Medina y a los doctores Augusto Espinoza y César Treviño la ayuda en la realización y revisión crítica de este trabajo. Abraham Medina agradece a la Dirección General de Recursos Materiales de la Universidad Autónoma de Zacatecas la ayuda parcial en la compra de material usado en los experimentos.

experimentales con distinto grado de complejidad (Nederman *et. al.*, 1982; Wieghardt, 1975; Jackson, 1983; Campbell, 1990; Prakash *et. al.*, 1991 y Wang *et. al.*, 1992), sin que hasta el momento los especialistas cuenten con una teoría o modelo capaz de describir, realísimamente, la dinámica seguida por el material granular.

El ejemplo más simple del flujo en tolvas lo constituye un reloj de arena, el cual presenta un comportamiento regular [la razón de descarga es aproximadamente constante (Nederman *et. al.*, 1982 y Wieghardt, 1975)]; es por ello que en la antigüedad se usaron éstos como medidores de tiempo. Sin embargo, en sistemas de tolvas industriales, el flujo granular puede originar inestabilidades (Prakash, 1991 y Wang *et. al.*, 1992) que a menudo se traducen en daños a las estructuras y deficientes procesos de vaciado. Es debido a esto que la caracterización completa del flujo a nivel teórico y experimental es de enorme importancia.

Nuestro objetivo en este trabajo será presentar, primordialmente, una discusión experimental sobre la dependencia de las razones medias de flujo en el nivel de llenado, como resultado de ello, encontramos, a diferencia de otros autores, que hay una notable dependencia en esta variable. Investigamos también, a partir del flujo que emerge de tolvas rectangulares bidimensionales y cuasi bidimensionales, el efecto de colocar las aperturas de salida en distintos lugares del fondo, lo que se traduce, finalmente, en un aumento de la razón media de descarga cuando el orificio es colocado junto a una de las paredes.

Brevemente, la división de este artículo es la siguiente: en la sección dos damos una somera discusión acerca de los resultados principales en las

razones de flujo granular en tolvas. En la sección tres presentamos el dispositivo experimental usado en este trabajo. En la sección cuatro discutimos nuestros principales resultados para el flujo en las tolvas bidimensionales y, por último, en la sección cinco, presentamos las conclusiones principales de nuestro estudio.

### I. Razón de flujo en tolvas

Antes de abordar el estudio del flujo granular en tolvas, conviene recordar qué entendemos por la razón media de flujo. La razón de flujo,  $w$  (también conocida como rapidez de vaciado o razón de descarga), es un parámetro importante para evaluar la cantidad de masa que pasa a través de una apertura en la unidad de tiempo (Zierep, 1971). Esta cantidad la podemos expresar como:

$$w = \rho v A, \quad (1)$$

que tiene unidades de masa/tiempo y donde  $\rho$  es la densidad del medio,  $v$  la velocidad de salida en la apertura y  $A$  es el área de la apertura de salida. Por claridad, podemos evaluar la razón de flujo de un fluido incompresible que llena un recipiente hasta una altura  $H$  respecto al orificio de salida; usando la ecuación de Torricelli (Zierep, 1971) y tomando el área como un rectángulo de longitud  $l$  y ancho  $S$ , llegamos a que:

$$w = \rho (2g)^{1/2} H^{1/2} l S. \quad (2)$$

Es decir, la razón de flujo es una función de  $H$ ; en esta última expresión,  $g$  es la aceleración de la gravedad.

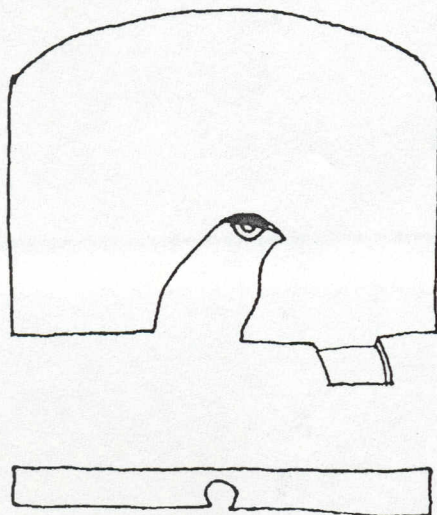
La razón media de flujo es el valor medio (en la altura) de la razón de flujo,  $\omega$ , y podemos definirla usando la ecuación 1, como:

$$W = \frac{1}{H} \int_0^H \omega dH = \frac{1}{H} \int_0^H \rho v A dH, \quad (3)$$

en donde hemos supuesto que el orificio está ubicado en  $H = 0$  y que el contenedor se ha llenado a una altura  $H$ . Desde el punto de vista físico, podemos entender a  $W$  como: masa total vaciada desde la tolva/tiempo total de vaciado. A partir de las ecuaciones 2 y 3 encontramos que, para un fluido:

$$W = \frac{2}{3} \rho (2g)^{1/2} H^{3/2} l S. \quad (4)$$

La medición de  $W$  para distintas alturas de llenado será la base a partir de la cual estudiaremos el flujo granular en nuestros experimentos.



Un resultado comúnmente aceptado por los especialistas es que la razón media de flujo granular en tolvas no depende de  $H$  (Nederman *et. al.*, 1982; Wieghardt, 1975; Jackson, 1983; Campbell, 1990; Prakash *et. al.*, 1991; Wang *et. al.*, 1992; Zierep, 1991 y Nguyen *et. al.*, 1990). Esta afirmación ha sido comúnmente aceptada, pero débilmente fundamentada teóricamente; las razones para preocuparse poco de esta cuestión son que la rapidez media de vaciado, para cada nivel de llenado, es en efecto constante y que comúnmente las tolvas son suficientemente altas (relativas a su ancho y al tamaño medio de grano del material granular). A un nivel más fundamental, el responsable aparente de que la altura no juegue un papel importante en la rapidez de vaciado de tolvas es el arqueado (Reynolds, 1885; Wieghardt, 1975). Este efecto se origina por el contacto entre granos que, en resumen, proyecta gran parte del peso del material granular sobre las paredes del contenedor.

Una cuestión importante, es entonces, si el arqueado depende de la altura, y en caso afirmativo, cómo se refleja esto en los valores de la razón media de flujo.

En el caso de tolvas con aperturas rectangulares no se conoce aún alguna relación de la dependencia explícita de la razón media de flujo en la altura. Sin embargo, un modelo basado en la conservación de la energía (Nederman, *et. al.*, 1982) lleva a que las únicas dependencias fundamentales en la rapidez media de vaciado de contenedores son el área de la apertura, la densidad de bulto del material  $\rho_b$  [definida por  $\rho_b = \eta\rho$ , con  $\eta$  el factor de empaquetamiento granular (Reynolds, 1885)] y la aceleración de la gravedad, lo anterior puede ponerse en una relación de la forma (Nederman *et. al.*, 1982; Wieghardt, 1975; Jackson, 1983; Campbell, 1990; Prakash, 1991):

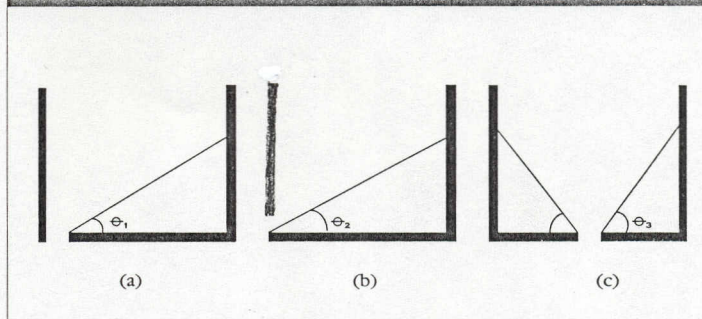
$$W_T = \rho_b g^{1/2} S^{3/2} \quad (5)$$

el subíndice  $T$  indica que la ecuación 5 es un resultado teórico. Más adelante mostraremos que la relación anterior no se satisface, salvo aproximadamente, para sólo uno de nuestros sistemas.

## II. Dispositivo experimental

En la figura 1 mostramos las tres disposiciones de aperturas en el fondo de las tolvas que estudiamos en este trabajo; las aperturas de salida en las figuras 1(a) y 1(c) son disposiciones comunes en el vaciado de tolvas, la figura 1(b) recuerda las aperturas usuales de salida en flujo de fluidos.

FIGURA 1. DISPOSICIÓN DE LAS APERTURAS PARA TOLVAS BIDIMENSIONALES. TODAS LAS APERTURAS TIENEN EL MISMO LARGO ( $l = 2$  CM) Y ANCHO ( $S = 0.45$  CM);  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  SON LOS ÁNGULOS DE REPOSO AL TÉRMINO DEL FLUJO.



Al término del flujo granular, el material residual siempre forma pendientes cuyos ángulos respecto a la horizontal son llamados ángulos de reposo y que denotamos en la figura 1 por  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , respectivamente (Nederman *et. al.*, 1982; Wieghardt, 1975).

Los ángulos de reposo en los materiales granulares son motivo de investigación actual (Jaeger, 1989; Held, 1990; Medina, 1992; Liu, 1991) debido a que son una condición límite del movimiento superficial de granos. Nuestro único interés respecto a este último punto consistirá en mostrar que los valores medios de los ángulos de reposo no difieren entre sí.

Los experimentos que realizamos son muy simples, para ello construimos tolvas rectangulares como las mostradas en la figura 1. Las tolvas midieron  $L = 20$  cm de largo,  $S = 0.45$  cm de fondo y de 5 a 115 cm de altura, éstas fueron construidas con láminas de vidrio y llenadas hasta una altura  $H$  con arena de Ottawa (casi esférica) o con canicas de vidrio. El tamaño medio de los granos de arena fue de  $0.72 \pm 0.1$  mm y densidad  $\rho = 2.58$  gr/cm<sup>3</sup>, las canicas de vidrio tenían un diámetro de  $4 \pm 0.2$  mm y una densidad  $\rho = 2.46$  gr/cm<sup>3</sup>.

Las aperturas de salida en el fondo de las cajas siempre tuvieron un tamaño de  $S = 0.45$  cm de ancho (mismo ancho que el de las tolvas) por  $l = 2.0$  cm de largo, éstas fueron dispuestas horizontalmente en la orilla izquierda (figura 1a), verticalmente en la orilla izquierda (figura 1b) y en el centro (figura 1c). El material granular se dejó salir libremente veinte veces para cada altura en cada tipo de apertura; el flujo de material fue filmado con una cámara Cannon CCD modelo A1 y a una velocidad de obturación de 500 cuadros/seg. La reproducción fue hecha a 28 cuadros/seg de manera que la incertidumbre en las mediciones temporales fue de  $\pm 0.02$  seg. A continuación se presentan algunas observaciones respecto a los experimentos:

1. El llenado fue hecho dejando caer libremente los granos en las tolvas verticales.
2. En los experimentos bidimensionales con canicas de 4 mm algunas veces hubo interrupción del flujo, entonces se observó un arco estático antes de la salida (arco de caída libre). Cuando esto ocurría, los experimentos fueron repetidos. Los experimentos con arena son cuasi bidimensionales, en virtud de lo estrecho de las tolvas (seis diámetros de grano).
3. Un comportamiento tipo extrusión (zona directamente encima de las aperturas con flujo rápido y zonas de estancamiento a los lados) fue observado en arena para todas las alturas y, sólo a pequeñas alturas (menores de 30 cm) en el material compuesto de canicas de vidrio, lo que confirma que existen complicados patrones de flujo dentro de las tolvas (Nguyen, 1980).
4. Las mediciones de las áreas vaciadas, de los tiempos de vaciado, y de los ángulos de reposo fueron promediados para cada altura (20 datos por altura). Los valores de estas cantidades mostraron muy poca dispersión (alrededor de 2%).

### III. Resultados

Desde un punto de vista experimental, los valores de la razón media de flujo,  $W'$ , los podemos obtener midiendo el volumen vaciado,  $V_v$ , y el tiempo total de vaciado,  $t_v$ ; el cociente  $V_v / t_v$  es la razón volumétrica, que multiplicada por la densidad de bulto,  $\rho_b$ , da razón media de flujo:

$$W' = \rho_b V_v / t_v = \rho_b A_v S / t_v \quad (6)$$

en donde hemos usado el hecho de que  $V_v = A_v S$ ;  $A_v$  es el área vaciada y  $S$ , el ancho, es constante.

Para facilitar la discusión de nuestros resultados es más adecuado expresar la rapidez media de vaciado en forma adimensional; dividiendo la ecuación 6 por la  $W'_T$  de la ecuación 5, obtenemos que:

$$W'' = \frac{W'}{W'_T} = \frac{A_v}{t_v g^{1/2} \Delta S^{1/2}} \quad (7)$$

donde  $W'$  denota la razón media adimensional de flujo.

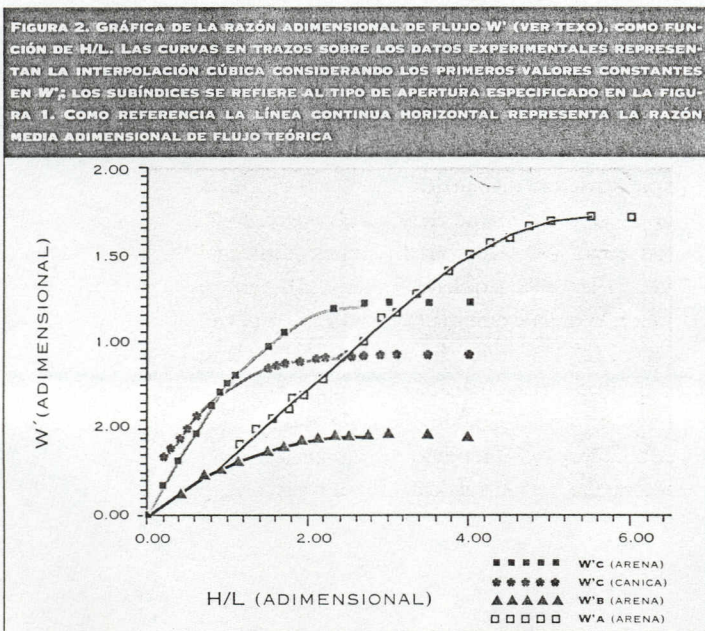
Los resultados de la cantidad  $W'_i$  (donde  $i = a, b, c$ , denota el distinto tipo de apertura. Ver figura 1), como función del parámetro adimensional  $H/L$  (altura de llenado/ancho de las tolvas), los mostramos en la figura 2.

De la gráfica incluida en dicha figura destaca inmediatamente que la razón media de flujo para distintas aperturas y distintos materiales (arena y canicas) muestra una clara dependencia en la altura (que después de cierto límite desaparece) y en la ubicación del orificio de vaciado.

Ya que la cantidad  $W$  (ecuación 6), obtenida del experimento, está normalizada por  $W'_T$ , la línea horizontal continua de la figura 2 (con un valor  $W' = 1$ ) indica el resultado teórico exacto de la razón media de flujo para los sistemas con apertura central. Resulta también obvio en la figura 2, que la predicción teórica falla para todos los experimentos, aunque la razón media de flujo para tolvas con apertura central y llenadas con canicas,  $W'_c$  (canica), es muy cercana a 1 a partir de  $H/L = 2$  (en este caso  $W'_c = 0.93$ ).

En sistemas con arena ocurren otros hechos interesantes. En primer lugar, la razón media de flujo para tolvas con apertura lateral horizontal,  $W'_a$ , depende de  $H/L$  aun para  $H/L = 5.4$ , desde donde se mantiene constante con un valor de  $W'_a = 1.71$ . A partir de esto podemos esperar que las tolvas con apertura lateral horizontal llenadas suficientemente alto se vacíen más rápido que las tolvas con apertura central. La razón media de vaciado para sistemas con apertura lateral vertical,  $W'_b$  (que recuerda los orificios típicos en el vaciado de fluidos), depende también de  $H/L$ , pero el valor constante,  $W'_b = 0.46$ , se alcanza en  $H/L = 2$ . Finalmente, los sistemas con apertura en el centro alcanzan su valor constante de rapidez media de vaciado a partir de  $H/L = 2.4$ , en donde  $W'_c = 1.22$ .

Un resultado ya reportado por otros autores (Nederman *et. al.*, 1982), es que la razón media de flujo para tolvas cilíndricas con apertura lateral horizontal supera a la razón media de flujo con apertura central entre 20% y 30%; no obstante, en



nuestros sistemas el porcentaje alcanza aproximadamente 40% (i. e., el vaciado es aparentemente más rápido en tolvas bi y cuasi bidimensionales).

Apelando a los modelos plásticos (Jackson, 1983; Wang, 1992) podemos sugerir que esta diferencia se debe a que durante el vaciado en nuestras tolvas la razón de corte (responsable del flujo) debe superar la compresión debida a las componentes del tensor de esfuerzos y éstas, a su vez, están en un plano paralelo a las placas verticales de vidrio; mientras que en las tolvas cilíndricas la razón de corte se ve afectada por las componentes del tensor de esfuerzos que, en estos sistemas, están distribuidas en tres dimensiones y su acción final es frenar el flujo (Wang, 1992).

En todos los casos analizados la mejor aproximación (hasta el primer valor constante de  $W'$ ) la constituyeron polinomios de tercer grado de la forma:

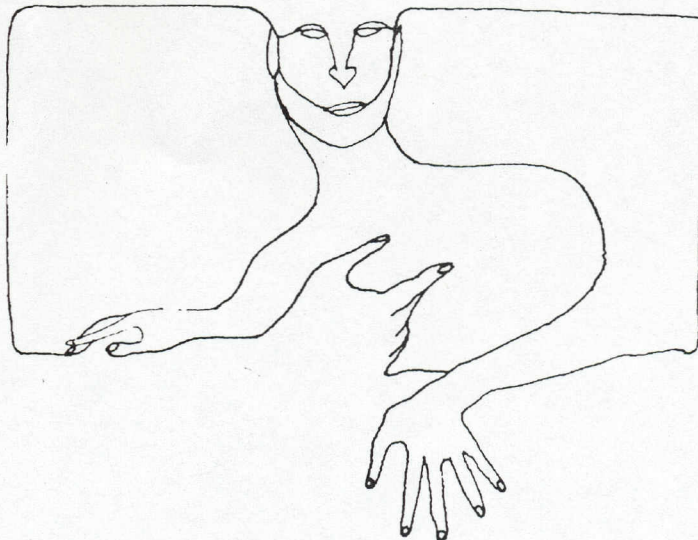
$$W' = \alpha(H/L) + \beta(H/L)^2 + \gamma(H/L)^3, \quad (8)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son constantes distintas para cada tipo de apertura (ver tabla 1, donde indicamos los coeficientes para las distintas razones medias de flujo en arena). Esto último significa que a pequeñas alturas la razón media de flujo cambia en todos los casos de manera polinomial.

TABLA 1			
COEFICIENTES DE $W'$ (ARENA)			
SALIDA	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
a	0.27	0.07	-0.01
b	0.36	-0.07	0
c	0.99	-0.22	0.01

Cuando la arena sale del orificio vertical lateral, el flujo de salida se desvía muy poco del recipiente y es casi tangencial a la orilla exterior inferior (figura 1b), esto significa que el tamaño virtual de la apertura por donde sale el flujo granular es muy pequeño.

Respecto a los valores medios de los ángulos de reposo para las distintas aperturas y alturas (en tolvas con arena), no encontramos alguna diferencia entre ellos pero sí respecto al valor medio obtenido con métodos cuasiestáticos (Medina, 1992). En efecto, el valor medio de los ángulos de reposo para las distintas aperturas mostradas en la figura 1 muestra que  $\langle \theta_1 \rangle = \langle \theta_2 \rangle = \langle \theta_3 \rangle = 40^\circ \pm 0.5^\circ$ , mientras que el valor del ángulo de reposo en cilindros con giro horizontal lento es  $\langle \theta_r \rangle = 29^\circ \pm 0.5^\circ$ . Esta diferencia entre los valores de los ángulos (de casi 38%) pudo, posiblemente, haber sido inducida por la compactación del material



residual debido al flujo del material granular, compactación que en todo caso parece ser de la misma magnitud independientemente de la disposición de la salida y de la altura.

### Conclusiones

Los anteriores resultados, basados en sistemas muy idealizados de tolvas (medio granular no cohesivo y cajas bidimensionales), muestran una clara desviación respecto a la teoría (Nederman *et. al.*, 1982) y nos ponen sobre aviso respecto a las complejas dependencias de los parámetros de flujo del material granular en relación con la dimensión espacial, la altura, y las distintas localizaciones de las aperturas.

La dependencia algebraica, respecto de  $H/L$ , de la razón de flujo,  $W'$ , nos advierte acerca de que fenómenos más fundamentales a escala de los granos tales como el arqueo [responsable de la no dependencia de la presión con la altura (Nederman *et. al.*, 1982; Wieghardt, 1975)], sólo son importantes a nivel de bulto a partir de cierto rango que depende del material y de la geometría del flujo; los valores de flujo medio constante se presentan a distintas alturas para las diferentes localizaciones de las aperturas y para distintos tipos de granos (figura 2). Un aspecto sorprendente de los resultados es que el valor constante de la rapidez media de vaciado para tolvas (llenadas con canicas) con apertura en el centro es muy próximo al valor teórico, lo cual sugiere que el

modelo basado en la conservación de la energía (Nederman *et. al.*, 1982) se ajusta muy bien a sistemas bidimensionales.

De igual manera, las curvas de la figura 2 recuerdan el comportamiento  $H^{1/2}$  (aunque en nuestros experimentos no ocurre tal) que se presenta en fluidos newtonianos, esto lleva necesariamente a distinguir el comportamiento de bulto del material como no newtoniano.

Las mediciones de los ángulos de reposo encontrados en nuestros experimentos dan valores distintos de los obtenidos por los métodos cuasiestáticos para el mismo material (Medina, 1992), y confirman importantes cuestiones como la influencia de la rapidez del flujo sobre los ángulos de reposo del material residual.

Una extensión de nuestros experimentos con-

siste en realizar la medición de la razón de flujo instantánea, lo que llevaría a un conocimiento muy detallado del flujo. Es posible que esta cantidad contenga el ruido asociado con los esfuerzos, ya caracterizado en otros experimentos (Baxter *et. al.*, 1993) y que por la naturaleza de nuestras mediciones no fue detectado. Los resultados de ambos experimentos constituirán los límites a los cuales un modelo real deberá de sujetarse.

Como una conclusión final, creemos, con base en lo anterior, que debe reforzarse la investigación experimental de los materiales granulados a partir de sistemas simples como un método para orientar las formulaciones teóricas, especialmente aquellas que pretenden caracterizar plenamente la dinámica granular y ser consistentes en los casos límite de dimensión y tamaño finito. ♦

#### BIBLIOGRAFÍA

- Bagnold, R. A. (1966). "The shearing and dilatation of dry sand and the singing mechanism", en *Proc. Roy. Soc. A.* 295 219-232.
- Baxter, G. W.; Leone, R.; Behringer, R. (1993). "Experimental test of time scales in flowing sand", *Europhys. Lett.* 21 569-574.
- Campbell, C. S. (1990). "Rapid granular Flows", en *Ann. Rev. Fluid Mech.* 22 57-92.
- Coulomb, C. A. (1773). *Memoires de mathématiques et de physique présentés à l'Académie royale des sciences par divers Savants et Luns dans les assemblées.* L'imprimerie Royale, Paris, 343-382.
- Evesque, P.; Smatula, E.; Denis, J. P. (1990). "Surface fluidization of a sand pile", en *Europhys. Lett.* 12 623-627.
- Evesque, P.; Fargeix, D.; Porion, P. (1993). "Pile density is a control parameter of sand avalanches", en *Phys. Rev. E.* 47 2326-2332.
- Haff, P. K. (1983). "Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon", en *J. Fluid Mech.* 134 401-430.
- Held, G. A.; Solina, D. H.; Keane, D. T.; Haag, W. J.; Horn, P. M.; Grinstein, G. (1990). "Experimental study of critical-mass fluctuations in an evolving sandpile", en *Phys. Rev. Lett.* 65 1120-1123.
- Herrman, H. J. (1992). "Simulation of granular media", en *Physica A.* 191 263-276.
- Jackson, R. (1983). "Some mathematical and physical aspects of continuum models for the motion granular materials", en R. E. Meyer (ed.), *Theory of Dispersed Multiphase Flow*, Academic Press, N. Y.
- Jaeger, H. M.; Liu, C.; Nagel, S. R. (1989). "Relaxation at the angle of repose", en *Phys. Rev. Lett.* 62 40-45.
- Jullien, R.; Meakin, P.; Pavlovitch, A. (1992). "Three-dimensional model for particle-size segregation by shaking", en *Phys. Rev. Lett.* 69 640-643.
- Liu, C.; Jaeger, H. M.; Nagel, S. R. (1991). "Finite-size effects on a sandpile", en *Phys. Rev. A.* 43 7091-7092.
- Mehta, A. (1992). "Real sandpiles: hysteresis and cooperative dynamics", en *Physica A.* 186 121-153.
- Medina, A. (1992). *Estudios en medios granulados: Dinámica de avalanchas.* Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias UNAM.
- Nederman, R. M.; Tuzun, U.; Savage, S. B.; Housby, G. T. (1982). "The flow of granular materials I: discharge rates from hoppers", en *Chem. Engng. Sci.* 37 1597-1609.
- Nguyen, T. V.; Brennen, C. E.; Sabersky, R. H. (1980). "Funnel Flow in hoppers", en *Trans. ASME E: J. Appl. Mech.* 47 729-735.
- Onoda, G. Y.; Linger, E. G. (1990). "Random loose packings of uniform spheres and the dilatance onset", en *Phys. Rev. Lett.* 64 2727-2729.
- Prakash, J.; Kesava Rao, K. (1991). "Steady compressible flow of cohesionless granular materials through a wedge-shaped bunker", en *J. Fluid Mech.* 225 21-80.
- Reynolds, O. (1885). "On the dilatance of media composed of rigid particles in contact", *Philos. Mag.* 20 469-481.
- Sokolovskii, V. V. (1965). *Statics of granular media.* Pergamon Press, N. Y.
- Wang, F.; Gardner, C. L.; Schaeffer, D. G. (1992). "Steady-state computations of granular flow in an axisymmetric hopper", en *SIAM Appl. Math.* 52 1076-1088.
- Wieghardt, K. (1975). "Experiments in granular Flow", en *Ann. Rev. Fluid Mech.* 7 89-114.
- Zierep, J. (1971). *Similarity laws and modelling.* Marcel Dekker, N. Y.