

# Alturas de equilibrio de líquidos en celdas de Hele-Shaw corrugadas bajo penetración capilar espontánea

M. Francisco and A. Medina

SEPI-ESIME-A, Instituto Politécnico Nacional, Av. de las Granjas 682,  
Col. Sta. Catarina Azcapotzalco D.F., 02550, Mexico.

F.A. Sánchez

FIME, Universidad Autónoma de Nuevo León,  
Monterrey, N.L., México.

F.J. Higuera

ETSI Aeronáuticos, UPM,  
Plaza Cardenal Cisneros, Madrid, Spain.

Recibido el 7 de marzo de 2008; aceptado el 28 de abril de 2008

Se presenta un método simple y general para calcular las alturas de equilibrio de un líquido que penetra espontáneamente, por capilaridad, en una celda de Hele-Shaw vertical y corrugada. La corrugación se impuso sobre cada una de las paredes interiores de las placas que forman la celda como funciones coseno y de esta forma se generan canales periódicos verticales. Se encuentra que esta corrugación determina complejos perfiles de equilibrio que pueden ser integrados para estimar los volúmenes de líquido absorbido o de gas desalojado. Se discuten también resultados para celdas corrugadas con una inclinación  $\alpha$  respecto a la vertical.

*Descriptores:* Penetración capilar; superficie libre; micro y nano flujos.

A simple and general method to calculate the equilibrium heights of a liquid that penetrates spontaneously, due to capillarity, into a corrugated Hele-Shaw cell is presented. A cosine-like corrugation was imposed on each internal face of the plates that made the cell and periodic channels were generated. It were found complex equilibrium heights which allow to evaluate the volumes of absorbed liquid or expelled gas. Equilibrium heights were also evaluated in corrugated tilted cells.

*Keywords:* Capillary penetration; free surface flows; micro and nano flows.

PACS: 47.55.N-; 47.60.Dx; 47.61.-k

## 1. Introducción

En este trabajo se considera el problema de las alturas de equilibrio que se alcanzan durante la penetración capilar espontánea de un líquido en una celda de Hele-Shaw corrugada, es decir, en el espacio entre un par de placas paralelas verticales corrugadas muy cercanas entre sí. Esta configuración puede considerarse como una idealización simple de una fractura de una roca real, saturada con dos fluidos inmiscibles, y en donde la irregular separación entre las superficies interiores de la fractura genera patrones de penetración capilar con complejas superficies libres [1, 2]. Similarmente, pero en otro contexto, por medio de la penetración capilar de líquidos poliméricos y cerámicos entre placas corrugadas se elaboran microengranes [3] y otras microestructuras [4]. No obstante, esta novedosa técnica que se conoce como micromoldeo [5] aún carece de las bases teóricas adecuadas para optimizar la penetración capilar en micro y nano canales de geometría compleja.

Hasta donde se sabe, el cálculo de la superficie de equilibrio de un líquido en los intersticios de una estructura compleja lo inició Taylor [6] cuando estudió el problema de la forma hiperbólica del menisco entre dos placas verticales que forman un ángulo pequeño entre ellas (diedro) [7]. El cálculo de la superficie de equilibrio de un líquido en un tubo capi-

lar de sección cuadrada [7], o en los espacios que quedan en arreglos de fibras cilíndricas sólidas, lleva también a meniscos en los que la elevación del líquido es mayor cerca de las esquinas que en el centro del tubo, y cuya forma sólo se puede describir aproximadamente [7, 8]. En términos de la masa de líquido, el error introducido en los cálculos al dejar de lado la elevación capilar en las esquinas es en ambos casos del 6%. En el caso de tubos capilares cónicos verticales [9] es posible tener *dos alturas* medias de equilibrio cuando los capilares son conos de sección transversal decreciente (cono normal) y *sólo una* si la sección transversal es creciente (cono invertido).

En el problema que ahora se estudia, el flujo capilar que se desarrolla bajo gravedad es un flujo de película que, bajo una adecuada promediación, puede ser formulado y resuelto de manera muy simple. Las alturas de equilibrio que resultan son perfiles complejos, expresados por funciones analíticas y en los cuales no hay errores de cálculo involucrados. Contrario a este enfoque, otros autores [10] resolvieron numéricamente el problema de las alturas de equilibrio entre placas corrugadas mediante métodos variacionales, de minimización de la energía potencial local [11]. Desafortunadamente, sus resultados son erróneos, ya que las zonas de máxima altura de equilibrio ocurren en zonas donde las placas se separan más. Esto físicamente no es posible, porque la presión capilar es inversamente proporcional a la separación en-

tre las placas, es decir, a menor espacio capilar, mayor altura de equilibrio. Parte de la finalidad de este trabajo es predecir la forma correcta de los perfiles de equilibrio, inclusive en una celda corrugada inclinada.

La división de este trabajo es como sigue: en la siguiente sección se formula el problema y se presenta la geometría de la celda corrugada. En la Sec. 3 construye la ecuación para el balance de presiones para las celdas corrugadas verticales y se extiende dicho modelo al análisis de la altura de equilibrio en celdas inclinadas. Se calculan las alturas de equilibrio en ambos casos y se discuten algunas de sus peculiaridades. En la Sec. 4 se calcula analíticamente el volumen retenido en la celda vertical corrugada; se encuentra que dicho volumen depende fuertemente de la corrugación. Este último resultado es particularmente importante en la industria petrolera, porque sustanciales cantidades de petróleo se quedan atrapadas capilarmente en las fracturas reales. Finalmente, en la Sec. 5 se resumen las principales conclusiones de este trabajo.

## 2. El Problema

El cálculo de la altura de equilibrio en un capilar cilíndrico permite de inmediato concluir aspectos importantes de este problema. Considérese un tubo capilar cilíndrico vertical de radio  $R$ , en el cual penetra por capilaridad un líquido de densidad  $\rho$ , tensión superficial  $\sigma$  y ángulo de contacto  $\theta$ . La presión capilar  $p_c$ , responsable de que el líquido ascienda, es  $p_c = 2\sigma \cos \theta / R$  y la carga hidrostática que se va generando bajo el campo gravitatorio al ascender el líquido a la altura  $H$  en el capilar es  $p_H = \rho g H$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. La altura de equilibrio se alcanza cuando ambas presiones se igualan, de manera que la altura de equilibrio resulta ser

$$H = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g R}. \quad (1)$$

Esta relación es conocida como la ley de Jurin [12] y muestra que la altura de equilibrio es mayor cuanto menor sea el radio del tubo.

En la Fig. 1a se muestra esquemáticamente el frente de penetración capilar de un líquido que asciende en una celda de Hele-Shaw corrugada en una dirección horizontal ( $y$ ). En dicha figura  $H(y)$  es y la elevación de la sección de la superficie del líquido por el plano vertical de simetría  $x = 0$ . La Fig. 1b representa un esquema de la sección transversal de la celda, en el plano horizontal  $xy$ , que muestra el semi-espaciado  $h(y)$  de las paredes interiores de las placas corrugadas, cuya forma funcional está dada por

$$h(y) = \pm w \left[ 1 - (1 - \delta) \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \right], \quad (2)$$

donde la coordenada horizontal  $y$  se extiende hacia  $\pm\infty$ .

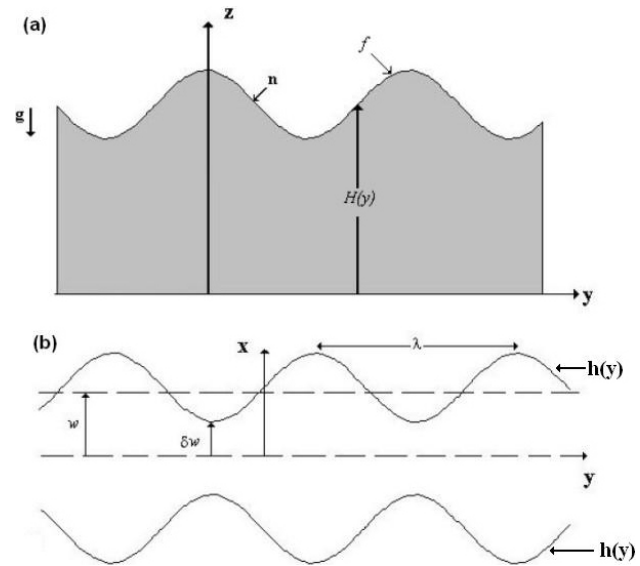


FIGURA 1. (a) Representación esquemática de la altura de equilibrio alcanzada bajo el campo gravitatorio en una celda de Hele-Shaw vertical corrugada. En dicha figura la superficie libre, es  $f$  y  $H(y)$  es el perfil de la altura de equilibrio (ver texto). Ambas crecen en la dirección  $z$ . (b) Vista esquemática de la sección transversal del canal corrugado, en el plano  $xy$ , en donde se especifican los planos medios de las corrugaciones,  $x = \pm w$ , la longitud de onda de la corrugación,  $\lambda$ , a lo largo de la dirección  $y$ . De esta figura es evidente que la amplitud de la corrugación es  $w(1 - \delta)$ .

El plano  $x = 0$  es el plano medio entre las placas y  $x = \pm w$  son los planos medios respecto a los cuales ocurre la corrugación, de amplitud  $w(1 - \delta)$  y longitud de onda  $\lambda$  en la dirección  $y$ . Nótese que si  $\delta = 1$  se obtiene el límite de placas paralelas sin corrugación con separación  $2w$ , mientras que cuando  $\delta \rightarrow 0$  la amplitud de la corrugación es muy cercana a  $w$  misma. No obstante, el caso  $\delta = 0$  está excluido, ya que no se tendría una separación finita entre las placas en  $y = \lambda$ , así  $0 < \delta \leq 1$ .

En lo que sigue se considera que la separación media entre las placas,  $2w$ , es mucho más pequeña que la longitud capilar  $l_c = \sqrt{\sigma/\rho g}$  y la longitud de onda  $\lambda$ ; es decir,  $2w \ll (l_c, \lambda)$ . En estas condiciones, las secciones de la superficie libre por planos  $y = \text{constante}$  son arcos de circunferencia de radio  $R = h/\cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo de contacto entre cada placa y el líquido.

Las condiciones antes expuestas son las típicas para un flujo de película y la determinación de la altura de equilibrio en este sistema parte de estos supuestos.

## 3. Alturas de equilibrio

### 3.1. Celda corrugada vertical

Si la celda está rodeada por un gas a la presión ambiente  $p_a$ , entonces la presión del líquido inmediatamente debajo de la superficie libre es [12]

$$P = p_a - \frac{\sigma}{R} = p_a - \frac{\sigma \cos \theta}{h(y)}, \quad (3)$$

donde  $h(y)$  está dada por la Ec. (2). Por otro lado, la presión hidrostática en el líquido a la altura de equilibrio  $z = H(y)$  es [12]

$$P = p_a - \rho g H. \quad (4)$$

Igualando las presiones dadas por las Ecs. (3) y (4), se encuentra que la altura de equilibrio es

$$H = \frac{\sigma \cos \theta}{\rho g h(y)}. \quad (5)$$

Sustituyendo el perfil cosenoidal de las placas dado por la Ec. (2), se llega a que la altura de equilibrio es un perfil de la forma

$$H(y) = \frac{\sigma \cos \theta}{\rho g w \left[ 1 - (1 - \delta) \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \right]}. \quad (6)$$

Este perfil de equilibrio es fuertemente dependiente de la amplitud de la corrugación y se extiende hacia  $y = \pm\infty$ .

Como un ejemplo de la utilidad de la Ec. (6), en la Fig. 2a se muestran los diferentes perfiles de la altura de equilibrio de la penetración capilar de agua en una celda de Hele-Shaw corrugada, llena inicialmente de aire a presión ambiente con dimensiones  $w = 100 \mu\text{m}$  y  $\lambda = 0.01 \text{ m}$  y corrugaciones con valores  $\delta = 0.1, 0.5, 0.85$  y  $1$ . Por simplicidad, se asume que el ángulo de contacto  $\theta = 0^\circ$ , lo cual implica un mojado perfecto. Para el sistema aire-agua la longitud capilar es  $l_c = 2.7 \times 10^{-3} \text{ m}$ , ya que  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma = 0.072 \text{ N/m}$  y  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . La Fig. 2a muestra como casos extremos que la corrugación con  $\delta = 0.1$  (*i.e.*, amplitud igual a  $0.9w$ ) produce alturas máximas de equilibrio de aproximadamente  $H_{\text{máx}} = 0.73 \text{ m}$ , mientras que las alturas mínimas para esta misma corrugación son  $H_{\text{mín}} = 0.05 \text{ m}$ . Por otro lado, la celda de Hele-Shaw sin corrugación ( $\delta = 1$ ) da una sola altura de equilibrio igual a

$$H_{HS} = \frac{\sigma \cos \theta}{\rho g w}, \quad (7)$$

la cual en este caso particular es  $H_{HS} = 0.07 \text{ m}$  (línea punteada en la Fig. 2a). En la Fig. 2b se muestran las secciones transversales de las celdas de Hele-Shaw para los valores de  $\delta$  considerados en el ejemplo, en dicha figura es claro que el valor medio de la separación entre las placas de la celda es  $2w = 200 \mu\text{m}$ .

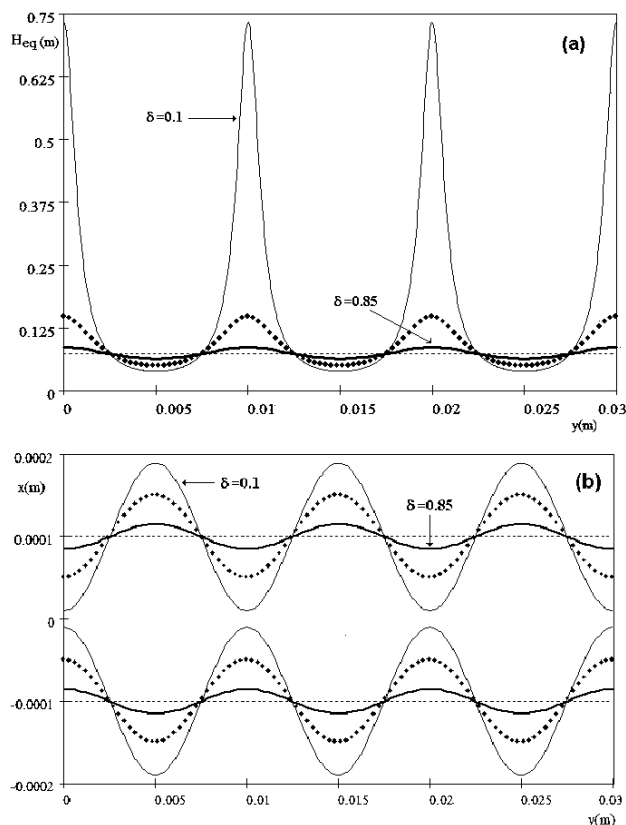


FIGURA 2. (a) Alturas de equilibrio, calculadas a partir de la Ec. (6), se asume que agua penetra en celdas llenas originalmente de aire. Las alturas de equilibrio son en realidad perfiles con valores de  $\delta = 0.1$  (—),  $\delta = 0.5$  (◆◆◆◆),  $\delta = 0.85$  (---) y  $\delta = 1$  (- - -). El caso con  $\delta = 1$  es el llamado caso de la celda de Hele-Shaw sin corrugación. (b) Perfiles de las placas corrugadas en donde se emplearon los mismos valores de  $\delta$  y los mismos tipos de líneas que en la Fig. 2a.

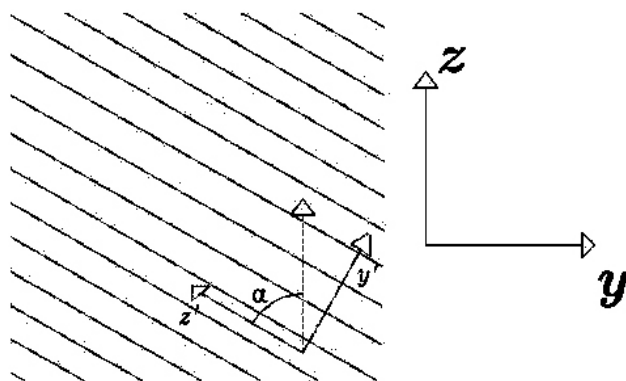


FIGURA 3. Esquema de una celda corrugada inclinada a un ángulo  $\alpha$  respecto a la vertical. En esta figura se muestran los sistemas de coordenadas  $(y, z)$  y  $(y', z')$ .

### 3.2. Celda corrugada inclinada a un ángulo $\alpha$

Resulta interesante estudiar el problema del equilibrio en una celda corrugada inclinada, ya que hasta donde se sabe este problema no se ha analizado previamente.

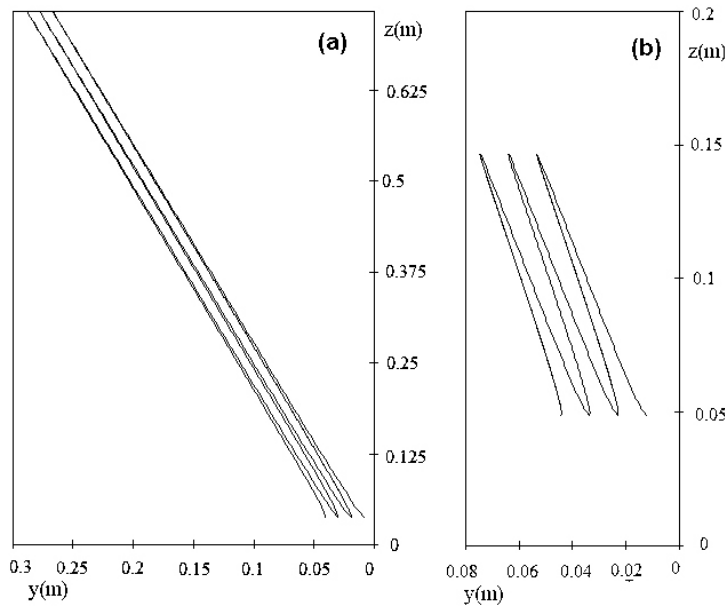


FIGURA 4. Alturas de equilibrio en una celda corrugada con (a)  $\alpha = 20^\circ$  y  $\delta = 0.1$  y (b)  $\alpha = 20^\circ$  y  $\delta = 0.5$ . En estas figuras sólo se han graficado pequeños intervalos de los perfiles de equilibrio.

Para estudiar este problema basta con inclinar a un ángulo  $\alpha$  la celda vertical corrugada y asumir las mismas condiciones que en el caso anterior. Las alturas de equilibrio en la celda inclinada ahora se describirán con el sistema de coordenadas rotado ( $y', z'$ ) (ver Fig. 3). Las coordenadas del sistema rotado se relacionan con el sistema vertical, ( $y, z$ ), de manera que [13]

$$y = y' \cos \alpha - z' \sin \alpha, \tag{8}$$

$$z = y' \sin \alpha + z' \cos \alpha. \tag{9}$$

Usando las Ecs. (2) y (8) es claro que en el sistema no rotado las ecuaciones de los perfiles de las paredes de las placas tienen ahora la forma

$$h = \pm w \left[ 1 - (1 - \delta) \cos \frac{2\pi}{\lambda} (y \cos \alpha + z \sin \alpha) \right]. \tag{10}$$

Entonces, en este sistema la presión en un punto interior y cercano a la superficie libre,  $z = H$ , adquiere la forma

$$P = p_a - \frac{\sigma \cos \theta}{h} = p_a - \frac{\sigma \cos \theta}{w \left[ 1 - (1 - \delta) \cos \frac{2\pi}{\lambda} (y \cos \alpha + H \sin \alpha) \right]}. \tag{11}$$

Por otro lado, la presión hidrostática a la altura de equilibrio  $z = H$  y en un punto interior del líquido tiene la forma [12]

$$P = p_a - \rho g H. \tag{12}$$

Igualando las presiones dadas por las Ecs. (11) y (12), se encuentra que la altura de equilibrio en el sistema no rotado,  $H$ , está dada por la ecuación trascendente

$$H = \frac{\sigma \cos \theta}{\rho g w \left[ 1 - (1 - \delta) \cos \frac{2\pi}{\lambda} (y \cos \alpha + H \sin \alpha) \right]}. \tag{13}$$

Rearreglando términos se obtiene una ecuación trascendente más simple cuya forma es

$$\frac{\lambda}{2\pi \cos \alpha} \arccos \left( \frac{1 - \frac{\sigma \cos \theta}{H \rho g w}}{1 - \delta} \right) = H \tan \alpha + y. \tag{14}$$

Para propósitos de comparación, en la Fig. 4 se grafican, usando la Ec. (14), los perfiles de equilibrio en una celda corrugada inclinada a  $\alpha = 20^\circ$  respecto a la vertical. Se ha considerado la entrada de agua bajo mojado perfecto en una celda llena de aire y se han supuesto los mismos valores de  $w$  y  $\lambda$  que en el caso vertical, *i.e.*,  $w = 100 \mu\text{m}$  y  $\lambda = 0.01 \text{ m}$ ; las corrugaciones de las gráficas tienen valores  $\delta = 0.1$  (Fig. 4a) y  $\delta = 0.5$  (Fig. 4b). Obsérvese que las alturas máximas y mínimas alcanzadas en estas celdas son del mismo orden de magnitud que las de las celdas verticales. Por otro lado, el caso con  $\delta = 1$  (celda sin corrugación) se analiza con la Ec. (13) y produce la misma altura de equilibrio que en la celda no inclinada,  $H_{HS} = \sigma \cos \theta / (\rho g w) = 0.07 \text{ m}$ . Este resultado es obvio, ya que si la celda no tiene corrugación, el líquido no distingue entre una celda inclinada y una no inclinada. Un aspecto muy importante de los perfiles en las celdas corrugadas inclinadas es que son sustancialmente más complejos que los de las celdas corrugadas verticales y son asimétricos, aún en el sistema coordinado ( $y', z'$ ).

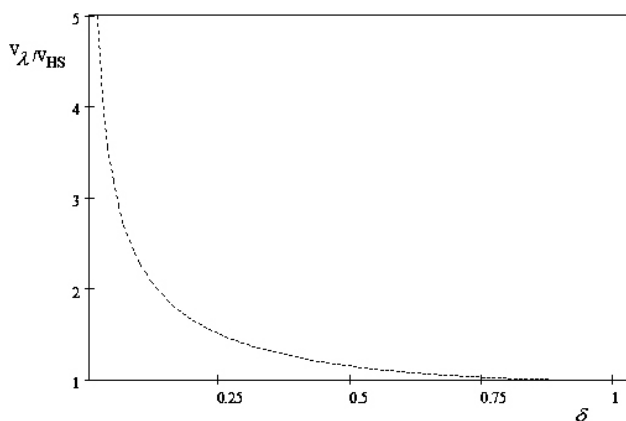


FIGURA 5. Gráfica de  $V_{\lambda}/V_{HS}$  como función de  $\delta$ . Nótese que a medida que la corrugación se hace más intensa ( $\delta \rightarrow 0$ ), el volumen en la celda corrugada,  $V_{\lambda}$ , es cada vez mayor que el volumen en la celda sin corrugación,  $V_{HS}$ .

#### 4. Volumen de líquido en celdas corrugadas verticales

Un resultado importante que se puede derivar analíticamente usando la Ec. (6) está relacionado con la cantidad de líquido que invade a la celda vertical corrugada (o la cantidad de gas desalojado de dicha celda) en una unidad de longitud  $\lambda$  cuando se alcanza la altura de equilibrio. Este volumen, en una unidad de longitud  $\lambda$ , es

$$V_{\lambda} = 2w \int_0^{\lambda} H(y) dy, \tag{15}$$

donde  $H(y)$  está dada por la Ec. (6) y se ha considerado que la separación media entre placas es  $2w$ . El cálculo de la integral lleva a que

$$V_{\lambda} = \frac{2\lambda\sigma \cos \theta}{\rho g} \frac{1}{\sqrt{2\delta - \delta^2}}. \tag{16}$$

Nótese que si la celda no tuviese corrugación,  $\delta = 1$ , el volumen de líquido en dicha celda de Hele-Shaw sería

$$V_{HS} = \frac{2\lambda\sigma \cos \theta}{\rho g}. \tag{17}$$

Recordando la Ec. (7), se encuentra que este volumen puede ser expresado en función de la altura de equilibrio de la celda de Hele-Shaw sin corrugación, como

$$V_{HS} = 2w\lambda H_{HS}. \tag{18}$$

La Ec. (17) puede usarse para expresar también el volumen en una celda corrugada [Ec. (16)] como

$$V_{\lambda} = \frac{V_{HS}}{\sqrt{2\delta - \delta^2}}. \tag{19}$$

Es conveniente recordar, como se discutió al inicio, que  $0 < \delta \leq 1$ , por lo que el volumen en la celda corrugada

en general es mayor o igual que el volumen en la celda no corrugada, *i.e.*,  $V_{\lambda} \geq V_{HS}$ .

A manera de ejemplo, se pueden estimar directamente los volúmenes de líquido atrapados en celdas con diferentes corrugaciones graficando la Ec.(19) en la forma

$$V_{\lambda}/V_{HS} = 1/\sqrt{2\delta - \delta^2}.$$

La Fig. 5 muestra cómo se incrementa el volumen retenido en función del incremento de la corrugación ( $\delta \rightarrow 0$ ): cuantitativamente, si  $\delta = 0.85$ , el volumen retenido es  $1.01 V_{HS}$ , es decir, 1.01 veces el volumen de la celda de Hele-Shaw sin corrugación, mientras que si  $\delta = 0.1$ , el volumen se incrementa hasta aproximadamente  $2.3 V_{HS}$ . Lógicamente, en

una celda con  $n$  corrugaciones el volumen de líquido retenido será  $nV_{\lambda}$ . El cálculo de los volúmenes retenidos en las celdas corrugadas inclinadas a un ángulo  $\alpha$  no es posible hacerlo en forma analítica, pero no es difícil estimar que, en orden de magnitud, los volúmenes de líquido retenido son justamente del mismo orden que los estimados para el caso vertical porque las alturas máximas y mínimas de los perfiles de equilibrio, en las celdas inclinadas, son del mismo orden de magnitud que en las celdas verticales.

#### 5. Conclusiones

En este trabajo se ha empleado una técnica, derivada de la teoría de la lubricación, que permite estudiar de manera simple las alturas de equilibrio en celdas verticales de Hele-Shaw corrugadas, en las cuales entra líquido por penetración capilar espontánea. El estudio teórico de las alturas de equilibrio en celdas corrugadas verticales o inclinadas permite concluir que la penetración capilar es compleja y que se forman perfiles de equilibrio que pueden incrementar sustancialmente las alturas máximas de equilibrio y los volúmenes de líquido retenido, en comparación con las celdas de Hele-Shaw sin corrugación. Los resultados aquí reportados son de interés para comprender aspectos fundamentales como las condiciones de equilibrio que se alcanzan durante la construcción de micro y nano estructuras formadas con las modernas técnicas de micromoldeo. En otro contexto, los resultados de las alturas de equilibrio y de los volúmenes retenidos también pueden ser de importancia en la industria petrolera, principalmente en los yacimientos fracturados, en donde la existencia de grandes poblaciones de fracturas verticales e inclinadas y un conocimiento detallado de la estructura de las fracturas posibilitan la estimación de los volúmenes de fluidos residuales de gran importancia económica como el petróleo y el gas.

#### Agradecimientos

Este trabajo fué realizado con el apoyo del IPN, Proyecto 20071443, y del PAICYT-UANL. Los autores también agradecen el apoyo del CONACyT bajo el proyecto 62054.

1. P. Dietrich *et al.*, *Flow and transport in fractured porous media* (Springer, 2005).
2. G.I. Barenblatt, V.M. Entov, and V.M. Ryzhik, *Theory of fluid flows through natural rocks* (Kluwer, Dordrecht, Países Bajos, 1990).
3. P. Jin, Y.L. Gao, N. Liu, J.B. Tan, and K. Jian, *Jour. Phys.: Conference Series* **48** 1471 (2006).
4. S.-J. Ahn and J. Moon, *Jour. Ceramic Soc. Japan*, Special Issue **112** (2004) S156.
5. E. Kim, Y.Xia, and G. Whitesides, *Nature* **376** (1995) 581.
6. B. Taylor, *Philos. Trans. R. Soc. London* **27** (1712) 538 (Taylor fue el famoso matemático inglés, contemporáneo de Newton, quien desarrolló la serie que lleva su nombre).
7. J. Bico and D. Quéré, *Jour. Colloid Interface Sci.* **247** (2002) 162.
8. H.M. Princen, *Jour. Colloid Interface Sci.* **30** (1969) 359.
9. M.M. Kusakov and D.N. Nekrasov, *Dokladi Akademi Nauk URSS* **119** (1958) 107.
10. A. Borhan, K.K. Rungta, and A. Marmur, *Jour. Colloid Interface Sci.* **146** (1991) 425.
11. A. Marmur, *Jour. Colloid Interface Sci.* **129** (1989) 278.
12. P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré, *Capillarity and wetting phenomena: drops, bubbles, pearls, waves* (Springer, Berlin, 2004).
13. C.H. Lehmann, *Geometría analítica* (Limusa, Mexico, 1980).