



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

ANÁLISIS DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR  
CONVECCIÓN MIXTA ALREDEDOR DE CILINDROS  
ISOTÉRMICOS EN TÁNDEM: EFECTO DE LA  
FLOTACIÓN, LA RELACIÓN DE ESPACIAMIENTO Y EL  
CONFINAMIENTO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
**Erick Salcedo Alvarez**

TUTOR PRINCIPAL  
Dr. Lorenzo Alberto Martínez Suástegui, E.S.I.M.E. Azcapotzalco, I.P.N.

COMITÉ TUTOR  
Dr. Federico Méndez Lavielle, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.  
Dr. José Roberto Zenit Camacho, I.I.M., U.N.A.M.  
Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.  
Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez, E.S.I.M.E. Azcapotzalco, I.P.N.

Ciudad de México, Agosto 2016

## JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Federico Méndez Lavielle

Secretario: Dr. José Roberto Zenit Camacho

1<sup>er</sup> Vocal: Dr. Lorenzo Alberto Martínez Suástegui

2<sup>do</sup> Vocal: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz

3<sup>er</sup> Vocal: Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

- Laboratorio de Combustión, Facultad de Ciencias, U.N.A.M.
- E.S.I.M.E. Azcapotzalco, I.P.N.
- Instituto de Investigaciones en Materiales, U.N.A.M.

### TUTOR DE TESIS:

Dr. Lorenzo Alberto Martínez Suástegui



---

FIRMA

# Agradecimientos

Al Dr. Lorenzo por compartirme sus conocimientos y su invaluable amistad. Gracias por su confianza y paciencia, ¡sin usted nada de esto hubiese sido posible!. ¡Siempre será un honor trabajar con usted Doc!

Al Dr. Juan Carlos Cajas por su cálida recepción cuando llegué a la U.N.A.M. Muchas gracias mi hermano por todas tus enseñanzas y por siempre estar tan al pendiente de mi.

Al Dr. César Treviño por su presencia aunque no física, a lo largo de mis estudios. Gracias por tomarse el tiempo de revisar mis trabajos y por sus valiosas enseñanzas. Le agradezco haberme dado un espacio para trabajar en la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M.

Al Dr. Roberto Zenit y al Dr. Carlos Palacios por facilitarme los equipos para realizar el trabajo experimental. Gracias por compartirme sus conocimientos y experiencias. Trabajar con ustedes fue una grata experiencia.

A los miembros del comité tutor: Dr. Federico Méndez, Dr. Roberto Zenit, Dr. Francisco Solorio y Dr. Oscar Bautista, por tomarse el tiempo de revisar este trabajo y por acompañarme durante todo el doctorado.

A mis amigos: Giovanni (Yovas), Eleazar Cervantes (El Eli), Francisco Hidalgo (OSN), Diana Libreros, Víctor Flores (Mujer), María, Juan Manuel Casillas (Tío), Francisco Villa (El Harry), Erika May, Víctor (Meteoro), Agustín Mora (El Agus), Manuel Peralta, Ajax, Salo (Chico), Salo (Grande), Gerardo (Cherry), Laura Casas, Andrés Matías, Andrés Pérez Terrazo, Fernando Aragón, Israel Rosas (Dr. Yescas), Isaac, Ileana Grave y Daniel Pastrana. Gracias a todos por acompañarme en mi viaje de vida, haciéndolo mucho más ameno y por sacarme de muchos problemas.

A la señora María Teresa Toris Chavez por siempre estar dispuesta a ayudarme.

A la señora Elizabeth Ledesma Varela por su confianza a lo largo de estos nueve años de tenerme como inquilino.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto Politécnico Nacional por darme la oportunidad de realizar mis estudios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido para la realización de este trabajo de tesis a través del proyecto CONACyT 167474.

# Dedicatoria

A mi Mamá, a mi Abuelita y a mi Tía, a quienes debo todo lo que soy

A mi Papá, a quién también agradezco enseñarme a soñar

A mis hermanas y hermano: Alina, Delia, María José y Héctor Gabriel, que son una fuente inagotable de felicidad e inspiración

A Ivonne, ¡TE AMO!

# Índice general

Índice de figuras . . . . .	II
Índice de tablas . . . . .	VIII
Nomenclatura . . . . .	X
Abstract . . . . .	XII
Resumen . . . . .	XIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
<b>I Estudio Numérico</b>	<b>5</b>
<b>2. Planteamiento del problema</b>	<b>6</b>
2.1. Formulación Matemática . . . . .	6
2.2. Solución Numérica . . . . .	9
2.2.1. Validación del algoritmo . . . . .	11
2.2.2. Estudio de independencia de malla . . . . .	12
<b>3. Resultados y discusión</b>	<b>14</b>
3.1. $Pr = 7$ y $BR = 20\%$ . . . . .	14
3.1.1. Flujo asistido ( $Ri = -1$ ) . . . . .	14
3.1.2. Flujo isotérmico ( $Ri = 0$ ) . . . . .	16
3.1.3. Flujo opuesto ( $1 \leq Ri \leq 4$ ) . . . . .	19
3.1.4. Número de Strouhal y diagramas de fase . . . . .	28
3.1.5. Velocidades promedio en el plano de simetría . . . . .	31
3.1.6. Ángulo de separación . . . . .	33
3.1.7. Relación de espaciamiento $\sigma = 3$ . . . . .	34
3.2. Transferencia de calor . . . . .	34
3.2.1. Número de Nusselt local . . . . .	34
3.2.2. Número de Nusselt promedio . . . . .	36
3.3. $Pr = 0.744$ y $BR = 30\%$ . . . . .	37
3.3.1. Flujo asistido ( $Ri = -1$ ) . . . . .	37
3.3.2. Convección forzada ( $Ri = 0$ ) . . . . .	38
3.3.3. Flujo opuesto ( $1 \leq Ri \leq 4$ ) . . . . .	40
3.3.4. Número de Strouhal y diagramas de fase . . . . .	46
3.3.5. Velocidades promedio en el plano de simetría del canal . . . . .	52

3.3.6. Ángulo de separación . . . . .	53
3.4. Transferencia de calor . . . . .	55
3.4.1. Números de Nusselt locales . . . . .	55
3.4.2. Número de Nusselt promedio . . . . .	56
<b>II Estudio Experimental</b>	<b>59</b>
<b>4. Materiales y métodos</b>	<b>60</b>
4.1. Diseño experimental . . . . .	60
4.2. Adquisición de imágenes . . . . .	62
4.3. Procesamiento de datos . . . . .	64
4.4. Análisis de incertidumbre . . . . .	64
<b>5. Resultados y discusión</b>	<b>65</b>
5.1. Flujo asistido ( $Ri = -1$ ) . . . . .	65
5.2. Flujo isotérmico ( $Ri = 0$ ) . . . . .	65
5.3. Flujo opuesto ( $1 \leq Ri \leq 4$ ) . . . . .	70
5.4. Velocidades promedio en el plano de simetría . . . . .	79
5.5. Longitud promedio de las estelas . . . . .	80
5.6. Ángulos de separación . . . . .	82
5.7. Número de Strouhal o frecuencia de desprendimiento . . . . .	83
5.8. Efecto de la relación de aspecto . . . . .	84
5.9. Comparación con los resultados numéricos . . . . .	88
<b>6. Conclusiones</b>	<b>90</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>92</b>
<b>Publicaciones</b>	<b>98</b>

# Índice de figuras

2.1.	Diagrama esquemático del dominio computacional y configuración de los cilindros dentro del canal. . . . .	7
2.2.	Detalle de las mallas utilizadas con $400 \times 450$ nodos en dirección horizontal y vertical, respectivamente. Imagen izquierda: $\sigma = 2$ y $BR = 30\%$ . Imagen derecha: $\sigma = 5$ y $BR = 20\%$ . . . . .	10
3.1.	Flujo adimensional estacionario para $Re_D = 200$ , $BR = 20\%$ y $Ri = -1$ ( $Gr = -4 \times 10^4$ ) para $\sigma = 2$ y $5$ . De izquierda a derecha: distribuciones de velocidad $U$ y $V$ , vorticidad $\Omega$ , y campos de temperatura $\theta$ , respectivamente. . . . .	15
3.2.	Flujo adimensional promedio para los cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ) con $Re_D = 200$ , $BR = 20\%$ y $\sigma = 2$ y $5$ . De izquierda a derecha: distribuciones de velocidad $U$ , $V$ y vorticidad $\Omega$ , respectivamente. . . . .	16
3.3.	Flujo adimensional promedio para valores de $Re_D = 200$ , $\sigma = 5$ , $BR = 20\%$ y $Ri = 0$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad $U$ , $V$ y vorticidad $\Omega$ , respectivamente. . . . .	17
3.4.	Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para $Ri = 0$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría del canal para varias posiciones en el eje $X$ . . . . .	18
3.5.	Valores adimensionales del flujo promedio para $Re_D = 200$ , $BR = 20\%$ y $Ri = 1$ ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) para $\sigma = 2$ y $5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad $U$ y $V$ , vorticidad $\Omega$ y campos de temperatura $\theta$ , respectivamente. . . . .	19
3.6.	Campos adimensionales instantáneos de velocidad, vorticidad y temperatura para $Re_D = 200$ , $BR = 20\%$ y $Ri = 1$ ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) para $\sigma = 2$ y $5$ . De izquierda a derecha: contornos de velocidad $U$ y $V$ , vorticidad $\Omega$ y campos de temperatura $\theta$ respectivamente. . . . .	21
3.7.	Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para $Ri = 1$ ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) y para $\sigma = 2$ y $5$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría del canal para diferentes posiciones en el eje $X$ . . . . .	22

3.8. Valores adimensionales del flujo promedio para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$  y campos de temperatura  $\theta$ , respectivamente. . . . . 23

3.9. Campos instantáneos adimensionales de velocidad y vorticidad para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$  mostrando el patrón de desprendimiento de vórtices para diferentes instantes de tiempo. . . . . 25

3.10. Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $\sigma = 2$  y  $5$  para  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ). Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría para diferentes posiciones de  $X$ . 26

3.11. Variaciones temporales de la componente adimensional de velocidad longitudinal como una función del tiempo adimensional para  $\sigma = 2$  y  $5$  para  $Ri = 3$  (imágenes en la parte superior) y  $Ri = 4$  (imágenes en la parte inferior). Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría para diferentes posiciones de  $X$ . . . . . 27

3.12.  $Re_D = 200$  y  $BR = 20\%$  para  $Ri = 0, 1$  y  $2$ . Primera y la tercera fila: Espectro normalizado de la velocidad trasversal para  $\sigma = 2$  y  $5$ , respectivamente. Segunda y cuarta fila: Diagrama de fase de la señal de la componente de velocidad longitudinal como una función de la señal de la componente de velocidad trasversal para  $\sigma = 2$  y  $5$ , respectivamente. . . . . 30

3.13. Perfiles adimensionales de velocidad axial a lo largo del plano de simetría como una función de la coordenada longitudinal para diferentes valores del número de Richardson para  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , respectivamente. 32

3.14. Distribución de los valores del número de Nusselt local sobre la superficie de cada cilindro como una función de  $\gamma$  para diferentes valores del número de Richardson con  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , respectivamente. . . . . 35

3.15. Evolución temporal de los números de Nusselt promedio para  $Re_D = 200$ ,  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ ,  $BR = 20\%$ , y distintos valores del número de Richardson para el cilindro superior (líneas punteadas) y el cilindro inferior (líneas continuas), respectivamente. . . . . 36

3.16. Flujo adimensional en estado estacionario para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = -1$  ( $Gr = -4 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campo de temperatura  $\theta$ , respectivamente. . . . . 39

3.17. Flujo adimensional promedio para los cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ) con  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 0$  y  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente. . . . . 40



3.18. Flujo instantáneo adimensional para cilindros sin calentar con valores de  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 0$  para  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente. . . . . 41

3.19. Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 0$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría del canal para varias posiciones en el eje  $X$ . . . . . 42

3.20. Valores del flujo promedio adimensional para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ),  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campo de temperatura  $\theta$ , respectivamente. . . . . 44

3.21. Patrones instantáneos de las componentes adimensionales de velocidad, vorticidad y temperatura para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campos de temperatura  $\theta$ , respectivamente. . . . . 46

3.22. Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría y en posiciones selectas dentro del canal. . . . . 47

3.23. Valores del flujo promedio adimensional para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campos de temperatura  $\theta$ , respectivamente. . . . . 48

3.24. Patrones instantáneos de las componentes adimensionales de velocidad, vorticidad y temperatura para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 2$  y  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ). De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campo de temperatura  $\theta$ , respectivamente. . . . . 49

3.25. Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) y  $\sigma = 2$  y  $5$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría y en diferentes posiciones del canal. 50

3.26.  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 0, 1$  y  $2$ . Primera y tercera fila: Espectro normalizado de la velocidad trasversal para  $\sigma = 2$  y  $5$ , respectivamente. Segunda y cuarta fila: Diagrama de fase de la señal de la componente de velocidad longitudinal como una función de la señal de la componente de velocidad transversal para  $\sigma = 2$  y  $5$ , respectivamente. . . . . 51

3.27. Perfiles adimensionales de velocidad axial a lo largo del plano de simetría como una función de la coordenada longitudinal para valores de  $\sigma = 2, 3$  y  $5$  y para diferentes números de Richardson. . . . . 53

3.28. Distribución de los números de Nusselt locales sobre la superficie de los cilindros como una función de  $\gamma$  para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$ , diferentes valores del número de Richardson y  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , respectivamente. . . . . 56

3.29. Evolución temporal de los números de Nusselt promedio para  $Re_D = 200$ ,  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ ,  $BR = 30\%$  y distintos valores del número de Richardson para el cilindro superior (líneas punteadas) y el cilindro inferior (líneas continuas), respectivamente. . . . . 57

3.30. Respuesta final del flujo para un valor del número de Reynolds fijo ( $Re_D = 200$ ) y diferentes valores del número de Richardson. . . . . 58

4.1. Diagrama esquemático del diseño experimental. (a) Depósito secundario. (b) Contracción a la entrada del canal con alineadores de flujo tipo panal de abeja. (c) Tubo de rebosadero. (d) Láser. (e) Baño térmico. (f) Cámaras digitales (CMOS). (g) Tanque de almacenamiento. (h) Válvula ajustable. (i) Bomba centrífuga. . . . . 61

4.2. Tamaño de las imágenes obtenidas después de superponer las imágenes de ambas cámaras. Las imágenes presentadas en la siguiente sección muestran una porción de la sección de prueba que corresponde a la región delimitada por el recuadro negro. . . . . 63

5.1. Valores adimensionales de flujo en estado estacionario para  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$ ,  $Ri = -1$  y  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, campos de las componentes de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y contornos de vorticidad, respectivamente. . . . . 66

5.2. Flujo adimensional promedio para los cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ) con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, campos de las componentes de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y contornos de vorticidad, respectivamente. . . . . 67

5.3. Patrones adimensionales instantáneos de la componente de velocidad transversal con líneas de corriente superpuestas y contornos de vorticidad para los cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ) con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$ , y  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. . . . . 68

5.4.  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 0$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. Imágenes superiores: variaciones temporales de la componente adimensional de velocidad transversal como una función del tiempo adimensional. Los datos se obtuvieron en el plano de simetría del canal para diferentes posiciones a lo largo de  $X$ . Imágenes inferiores: Espectro normalizado de la componente de velocidad transversal. Las frecuencias adimensionales del desprendimiento de vórtices se ejemplifican por los picos más altos. . . . . 69

5.5. Valores de flujo promedio adimensional con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 1$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, campos de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y contornos de vorticidad  $\Omega$ , respectivamente. . . . . 71

5.6. Patrones instantáneos de las componentes adimensionales de velocidad transversal con líneas de corriente superpuestas y contornos de vorticidad para  $Ri = 1$ , mostrando las estructuras vorticales que se desprenden para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. . . . . 72

5.7.  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 1$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. Imágenes superiores: variaciones temporales de la componente adimensional de velocidad transversal como una función del tiempo adimensional. Los datos se obtuvieron a lo largo del eje de simetría en diferentes posiciones de  $X$ . Imágenes inferiores: Espectro normalizado de la componente de velocidad transversal como una función del número de Strouhal. Las frecuencias de desprendimiento adimensionales se muestran en los picos más grandes. . . . . 73

5.8. Valores del flujo adimensional promedio con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 2$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, contornos de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente. . . . . 74

5.9. Patrones instantáneos de las componentes adimensionales de velocidad transversal con líneas de corriente superpuestas y contornos de vorticidad para  $Ri = 2$ , mostrando las estructuras vorticales que se desprenden para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. . . . . 75

5.10.  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 2$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. Imágenes superiores: variaciones temporales de la componente adimensionales de velocidad transversal como una función del tiempo adimensional. Los datos se obtuvieron a lo largo del eje de simetría en diferentes posiciones de  $X$ . Imágenes inferiores: Espectro normalizado de la componente de velocidad transversal como una función del número de Strouhal. . . . . 76

5.11. Valores del flujo adimensional promedio con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 3$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, contornos de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente. . . . . 77

5.12. Imágenes izquierdas:  $Re = 100$ . Imágenes derechas:  $Re = 200$ . Imágenes superiores: Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 3$ . Los datos se obtuvieron a lo largo de eje de simetría en diferentes posiciones de  $X$ . Imágenes inferiores: Espectro normalizado de la componente de velocidad transversal como una función del número de Strouhal. . . . . 78

5.13. Perfiles de velocidad adimensional a lo largo del plano de simetría como una función de la coordenada longitudinal adimensional para  $Re = 100$  y  $200$  y diferentes valores del número de Richardson. . . . . 79

5.14. Valor promedio  $\pm DE$  de la longitud adimensional promedio de la estela del cilindro inferior  $\sigma_{v2}/D$  para  $Re = 100$  y  $200$  como una función del número de Richardson. La longitud es medida desde el centro del cilindro inferior. . . . . 81

5.15. Patrones de flujo promedio en el plano  $X-Z$  para  $Ri = -1$  (imágenes superiores) y  $Ri = 0$  (imágenes inferiores) para  $Re = 100$  y  $200$ . Las imágenes muestran de izquierda a derecha el contorno de la componente de velocidad longitudinal con líneas de corriente superpuestas y la componente de velocidad en dirección de la envergadura con vectores de velocidad superpuestos, respectivamente. . . . . 85

5.16. Patrones de flujo promedio en el plano  $X-Z$  para  $Ri = 1$  (imágenes superiores) y  $Ri = 2$  (imágenes inferiores) para  $Re = 100$  y  $200$ . Las imágenes muestran de izquierda a derecha el contorno de la componente de velocidad longitudinal con líneas de corriente superpuestas y la componente de velocidad en dirección de la envergadura con vectores de velocidad superpuestos, respectivamente. . . . . 86

5.17. Patrones de flujo promedio en el plano  $X-Z$  para  $Ri = 3$  y  $Re = 100$  y  $200$ . Las imágenes muestran de izquierda a derecha el contorno de la componente de velocidad longitudinal con las líneas de corriente superpuestas y la componente de velocidad en dirección de la envergadura, con los vectores de velocidad superpuestos, respectivamente. . . . . 87

5.18. Comparación de flujos promedio obtenidos del estudio numérico y experimental para  $Re = 200$ ,  $Ri = 0$  y  $\sigma = 3$ , mostrando los contornos de la componente de velocidad longitudinal con vectores superpuestos y los contornos de vorticidad, respectivamente. . . . . 89

# Índice de tablas

2.1.	Comparación entre los valores críticos para que haya rompimiento de simetría por medio de una bifurcación de Hopf junto con su número de Strouhal correspondiente. . . . .	11
2.2.	Comparación de los valores del número de Nusselt promedio para un radio de bloqueo de $BR = 0.2$ y diferentes valores del número de Reynolds. . . . .	12
2.3.	Resultados del estudio de independencia de malla para $BR = 30\%$ . . . . .	13
2.4.	Resultados del estudio de independencia de malla para $BR = 20\%$ . . . . .	13
3.1.	Ángulo de separación como función del número de Richardson para $Re_D = 200$ , $BR = 20\%$ y $\sigma = 2, 3$ y $5$ . . . . .	33
3.2.	Ángulo de separación como una función del número de Richardson para $Re_D = 200$ , $BR = 30\%$ y $\sigma = 2, 3$ y $5$ . . . . .	54
5.1.	Resumen de las mediciones del flujo promedio para $Re = 100$ y $200$ como una función del número de Richardson. . . . .	82
5.2.	Ángulo de Separación (en grados) del cilindro superior e inferior como una función del número de Richardson para $Re = 100$ y $200$ . . . . .	83
5.3.	Número de Strouhal para $Re = 100$ y $200$ como una función del número de Richardson. . . . .	84
5.4.	Comparación entre datos experimentales y resultados numéricos para $Re = 100$ y $200$ como función del número de Richardson. . . . .	88

## Nomenclatura

$BR$	radio de bloqueo, $D/H$
$D$	diámetro del cilindro (longitud característica)
$DE$	desviación estándar
$f$	frecuencia del desprendimiento de vórtices (Hz)
$g$	aceleración gravitacional
$Gr$	número de Grashof, $Gr = g\beta(T_w - T_0)D^3/\nu^2$
$h$	coeficiente de transferencia de calor local
$H$	ancho del dominio computacional
$k$	conductividad térmica del fluido
$L$	distancia entre los centros de los cilindros
$L_{tot}$	longitud del dominio computacional
$L_{v1}$	longitud de la estela del cilindro superior
$L_{v2}$	longitud de la estela del cilindro inferior
$n$	dirección normal
$Nu$	número de Nusselt local (ver Eqs. (2.9) y (2.10))
$\overline{Nu}$	número de Nusselt promedio (ver Eq. (2.11))
$Pe$	número de Peclet, $Pe = u_0 D/\alpha$
$Pr$	número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$
$Re$	número de Reynolds, $Re = u_0 D/\nu$
$Re_D$	número de Reynolds basado en el diámetro del cilindro $Re_D = u_D D/\nu$
$Ri$	número de Richardson, $Ri = Gr/Re^2$
$S$	longitud desde el origen hasta la salida del canal
$St$	número de Strouhal, $St = fD/u_0$
$t$	tiempo
$T$	temperatura
$T_0$	temperatura del fluido a la entrada del canal
$T_w$	temperatura sobre la superficie de los cilindros
$u_0$	velocidad promedio del fluido a la entrada del canal
$u_D$	velocidad longitudinal promedio sobre los cilindros
$u, v$	componentes de velocidad longitudinal y transversal
$U$	componente de velocidad longitudinal adimensional, $U = u/u_0$
$V$	componente de velocidad transversal adimensional, $V = v/u_0$
$W$	envergadura de los cilindros (profundidad del canal)
$x, y, z$	coordenadas cartesianas rectangulares
$X$	coordenada longitudinal adimensional, $X = x/D$
$Y$	coordenada transversal adimensional, $Y = y/D$
$Z$	coordenada transversal adimensional, $Z = z/W$

## Letras Griegas

$\alpha$	difusividad térmica del fluido
$\beta$	coeficiente de expansión volumétrica
$\gamma_s$	ángulo de separación

---

$\mu$	viscosidad dinámica
$\nu$	viscosidad cinemática
$\psi$	función de corriente adimensional
$\Omega$	vorticidad adimensional
$\sigma$	relación de espaciamiento adimensional $\sigma = L/D$
$\sigma_{v1}$	longitud de la estela adimensional, $\sigma_{v1} = L_{v1}/D$
$\sigma_{v2}$	longitud de la estela adimensional, $\sigma_{v2} = L_{v2}/D$
$\tau$	tiempo adimensional
$\theta$	temperatura adimensional

**Subíndices**

0	ambiente o de referencia
1, 2	hace referencia al cilindro superior e inferior, respectivamente
$w$	en la superficie de los cilindros

# Abstract

In this work, two-dimensional numerical simulations are carried out to investigate the unsteady mixed convection heat transfer in a laminar cross-flow from two equal-sized isothermal in-line cylinders confined inside a vertical channel. The governing equations are solved using the vorticity-stream function formulation of the incompressible Navier-Stokes and energy equations using the control-volume method on a non-uniform orthogonal Cartesian grid. The numerical scheme is validated for the standard case of a symmetrically confined isothermal circular cylinder in a plane channel. Calculations are performed for flow conditions with Reynolds number based on cylinder diameter of  $Re = 200$ , two values of the Prandtl number of  $Pr = 0.744$  and  $Pr = 7$ , values of the buoyancy parameter (Richardson number) in the range  $-1 \leq Ri \leq 4$ , and two blockage ratios of  $BR = D/H = 0.2$  and  $0.3$ . We consider all possible flow regimes by setting the pitch-to-diameter ratios ( $\sigma = L/D$ ) to 2, 3 and 5. The interference effects and complex flow features are presented in the form of mean and instantaneous velocity, vorticity and temperature distributions. In addition, separation angles, time traces of velocity fluctuation, Strouhal number, characteristic times of flow oscillation, phase-space relation between the longitudinal and transverse velocity signals, wake structure, and recirculation length behind each cylinder have been determined. Local and average Nusselt numbers for the upstream and downstream cylinders have also been obtained. The results reported herein demonstrate how the flow and heat transfer characteristics are significantly modified by the wall confinement, tube spacing, and thermal effects for a wide range in the parametric space.

An experimental investigation of laminar aiding and opposing mixed convection is carried out using particle image velocimetry (PIV) to assess the thermal effects on the wake of two isothermal cylinders of equal diameter in tandem array placed horizontally and confined inside a vertical closed-loop downward rectangular water channel. The buoyancy effect on the flow distributions are revealed for flow conditions with Reynolds number based on cylinder diameter of  $Re = 100$  and  $200$ , blockage ratio of  $BR = 0.3$ , aspect ratio of  $AR = W/D = 5$ , pitch-to-diameter ratio of  $\sigma = 3$ , and values of the buoyancy parameter in the range  $-1 \leq Ri \leq 3$ . In this work, the interference effects on the complex flow features are presented in the form of mean and instantaneous contours of velocity and vorticity. In addition, separation angles, wake structure, recirculation bubble lengths, time traces of velocity fluctuation, Strouhal number and vortex shedding modes of the two-cylinder system are obtained as a function of the Richardson number. In this arrangement, the results indicate that the effects of the Reynolds number are very pronounced, and the vortex shedding patterns exhibit a strong dependence on  $Ri$ . We also show the modulation effect of the channel walls on the three-dimensional flow under varying thermal buoyancy, and the results reported herein demonstrate how the flow structure, wake behaviour and vortex shedding pattern are entirely different from that behind a single confined circular cylinder under wall confinement and thermal effects.



# Resumen

En este trabajo se llevaron a cabo simulaciones numéricas para estudiar la transferencia de calor por convección mixta en un flujo laminar cruzado a través de dos cilindros isotérmicos de diámetro  $D$  colocados en línea y confinados en un canal vertical. Las ecuaciones de gobierno se resuelven empleando la formulación vorticidad-función de corriente de las ecuaciones de Navier-Stokes y la energía para flujo incompresible empleando el método de volúmenes de control en una malla ortogonal cartesiana no uniforme. El esquema numérico se validó para el caso de un cilindro isotérmico confinado simétricamente. Los cálculos se realizaron con los siguientes parámetros: número de Reynolds basado en el diámetro del cilindro de  $Re_D = 200$ , dos valores del número de Prandtl de  $Pr = 0.744$  y  $7$ , valores del parámetro de flotación (número de Richardson) en un intervalo de  $-1 \leq Ri \leq 4$ , y dos radios de bloqueo de  $BR = D/H = 0.2$  y  $0.3$ . Se consideraron todos los regímenes de flujo empleando una separación entre cilindros ( $\sigma = L/D$ ) de  $2$ ,  $3$  y  $5$ . Los efectos de la interferencia y las características del flujo se presentan en forma de contornos promedio e instantáneos de velocidad, vorticidad y temperatura. Adicionalmente, se obtienen ángulos de separación, fluctuaciones temporales de velocidad, número de Strouhal, tiempos característicos de oscilación, diagramas de fase entre las señales de las componentes de velocidad longitudinal y transversal, estructura de la estela y la longitud de la zona de recirculación de cada cilindro. También se determinaron los valores de los números de Nusselt locales y promedio para cada cilindro. Los resultados demuestran cómo las características del flujo y la transferencia de calor son modificados significativamente por el confinamiento, el espacio entre cilindros y por los efectos térmicos para un intervalo amplio en el espacio paramétrico.

Se realizó un estudio experimental empleando velocimetría por imágenes de partículas (PIV) para evaluar los efectos térmicos en la estela de dos cilindros isotérmicos colocados en tándem y confinados en un canal vertical de sección rectangular. El efecto de la flotación en la distribución del flujo se muestra para las condiciones de flujo siguientes:  $Re = 100$  y  $200$ , radio de bloqueo de  $BR = 0.3$ , relación de aspecto de  $AR = W/D = 5$ , relación de espaciamiento de  $\sigma = 3$ , y valores del parámetro de flotación en el intervalo  $-1 \leq Ri \leq 3$ . En este trabajo se presentan contornos instantáneos y promedio del flujo. Además, se obtienen ángulos de separación, estructura de la estela, longitud de las regiones de recirculación, fluctuaciones temporales de las señales de las componentes de velocidad, número de Strouhal, y patrones de desprendimiento de vórtices del arreglo de cilindros como una función del  $Ri$ . Los resultados muestran que los efectos del  $Re$  son muy pronunciados y el patrón de desprendimiento de vórtices exhibe una fuerte dependencia al  $Ri$ . También se muestra el efecto de modulación de las paredes en el flujo tridimensional bajo la influencia de la flotación térmica, y los resultados reportados demuestran cómo la estructura del flujo, el comportamiento de la estela y el patrón de desprendimiento de vórtices difieren de los reportados para un sólo cilindro circular confinado y sujeto a fuerzas de flotación.